GEOMETRIA
MAGNA
IN MINIMIS,
IN TRES PARTES DIVISA.

PARS I.

DE MINIMIS IN COMMVNI.

PARS II.

DE MINIMIS IN PLANO.

PARS III.

DE MINIMIS IN SOLIDO.

AVTHORE

R. A. P.

IOSEPHO ZARAGOZÁ

VALENTINO, SOCIETATIS IESV.

Prima Editio

BIBLIOTECA

GEOMETRIAE MAGNAE IN MINIMIS PARS PRIMA.

PROBLEMA CATHOLICVM RESOLVIT.

CATHOLICO, ET MAXIMO

CAROLO II.

HISPANIARVM REGI SACRATVM.

AVTHORE

R. A. P. IOSEPHO ZARAGOZA VALENTINO, SOCIETATIS IESV,

In Suprema Hiſpaniarum Inquiſitione propoſitionum Fidei Cenſori, olim Theologiæ Scholaſticæ in Collegijs Balearico, Barcinonenſi, & Valentino; nunc in Matritenſi Academia Imperialis Collegij Matheſeos Profeſſore Regio.

Prima Editio.

TOLETI. Apud Franciſcum Calvo, Typogr. Reg. Anno Domini 1674.

Superiorum permiſſu.

CATHOLICO REGI
MAXIMO
CAROLO SECVNDO,
HISPANIARVM, AC INDIARVM
MONARCHAE POTENTISSIMO.

Eometriam, ſtylo, & obiecto Minimam, vt Magna fiat, pedibus V. Maieſtatis ſubijcio, quos ſi vel ſemel liceat attingere, eò magnitudinis euecta erit, vt maiorem, nec aſſequi, nec ſperare valeat, cùm in tãta Maieſtate præterætatem, nihil minimum, nihil eſſe poſsit non magnum Meum non fuit opus hoc Regio nomini conſecrare, cum tot nominibus ipſum Regi Catholico appareat devinctum. Hiſpanus Author, & in Acadæmia Regia Profeſſor lucubrationes ſuas regijs & iuſſu, & ſumptibus excuſſas, imò & tanti patrocinij ſpe conceptas, licet ingratitudinis reus audire vellet, ſubalienis auſpicijs evulgare non poſſet. Accedit hiſce Geometriæ magnitudo, quæ terminorum impatiens tantæ Maieſtatis vmbram, ſcilicet immenſam expoſcit analo-

gia

gia mirabili. Magna illa in Minimis, hæc verò in minima ætate Maxima. Hiſpanum Imperium vaſtiſsima ſua mole in totum orbem diſuſum, Regio ſpiritu viuit: Heu quãtus huic erit, qui tanto corpori animando ſufficiat! Martis alumni bellicum ardorem ſupra Martialem ſpiritum vaticinantur, Muſarum Cultores præſidem Apollinem experiuntur, & Iouem alterum regno datum augurantur quotquot regias actiones animi candore conſpicuas ſupra canitiem vident. Gemmant tenellæ arbores, vt in flores vernent, & autumment in fructus: ſed primo vere M. V. gemmas in flores, hos in fructus convertit prudentiæ calore decoctos, ſpem ſcilicèt præuertente gaudio, floridum ver grauido Autumno. Reſtituta nobis aurea ſæcula credimus, cùm in vnũ collectos auguramur Ferdinandos, Carolos, Philippos. illos regimine, ac virtute bellica; hos verò ſpecie, prudentia, pietate, & magnitudine, quorum ſingulæ dotes ita in V. Maieſtate ſingulares ſeſe omnes oſtendunt, vt quæuis ingenita credi, & in tanto Rege principem ſibi locum velit, quem dum ſingulæ ambiunt, iam illum ſuo quæque iure ſibi vẽdicant, & arrogant ſingulæ. Vix hæc Regia Maieſtas duodennis ſceptro manum extẽdit,

&

& oſtendit negotiorum expeditioni faciem, cùm rerum facies mutata eſt, ac nouo ſplendore induta auguratur Hiſpania priſtinum ſplendorem, quem à ſæculo habuit inſtaurandum Regius enim candor, indoles aurea, militum amor, & ardor in militarem gloriã propenſus, cautus ſine aſtu animus, ſecretorum auarus, tenax propoſiti, in munera profuſus, & reliquæ animi dotes verè Regiæ ſpem non ſolùm faciunt. V. M magnum futurum, ſed vere Maximum eſſe prædicant, ac Heroes inter enumerãdum: cum puerum per prudentiam, vel prudentiam per puerum regnare ſummo Imperij bono, & gaudio videamus. Hoc ipſũ teſtatur cœlum ipſum, ſi nobis ſtellarum caracteres interpretari liceat. Fortunatus Iuppiter fortunam hanc non volubilem, ſed regno ſtabilem pollicetur. Eſto, ſileant tamen fortunata ſydera, Empyreum miraculo conceptionis fat loquitur. Eo enim Patre genitus eſt M. V. fracto ſcilicet viribus, ætate, ac valetudine ingraueſcentibus, vt nemo prudens in dubium verterit, quin donũ hoc totum cœleſte à Superis conceſſum fuerit Catholico Regno. Timendum igitur nobis nõ eſt, neque ſperandum hoſtibus, ſuperum hoc munus antediem euolaturum. vnum his timẽdum, qui ar-

armata manu tanti Regis fatum præstolantur, ne serò pœniteant, ni citò exarmentur. Heu quantum sibi comparant hostẽ, qui enermem aitu aggrediuntur! Moueant igitur arma, insultent si licet. Hispaniæ fortè causam agunt, dum illius perniciem moliuntur. Quiescentẽ Leonem exagitant, qui Hispanum Achillem è sinu Matris ad martialem arenã prouocant in sui ruinam. Quantum subitis in casibus est ingenium, tantum oppressa mansuetudo induit animũ ad vindictam. Temporis, aut corporis quantitate metiri spiritum, error est, & quidem grauis. Magnus spiritus tenello corpusculo in ætate minima præpeditur, nec ideò magnus non est, imò illum excitabit, vt probet maximum emulatio. Hanc non vanam coniecturam, sed vaticinium credo experientia comprobandum. Huic vastissimo Imperio magnam spem facit M. V. amplificandæ gloriæ a Maioribus acceptæ, ac hæreditario iure possessæ, maiora tamen præstituru m spero, cũ Aurora ascendens in perfectum diem profecerit Proficiat vtinam, & ibi culminans sistat cursum, & lumen sæculo integro, imò & æternum perennet.

Ioſephus Zaragozã.

OPE-

OPERIS RATIO LECTORI.

GEometria nostro hoc seculo summum incrementum accepit a clarissimis Geometris, quorum opera aternitati sacrata nostra commendatione non indigent. Alij enim Antiquorum inventa, quæ temporis iniuria perierant, orbi literario restituta dedere, alij Geometriam nouis inuentis amplificarunt, quos lubens hic ommitto, ne cui prælato alterius nomine iniuriã irrogare videar, cum inter subtilissima inventa, nec Apollo ipse huic præ alijs facilè principem concedet locum ingenuè tamen, ac religiosè profiteor, me omnes, qui aliqua saltèm noua propositione Geometriam auxerint, summa veneratione excipere, non semèl expertus quamplurima iucũdissima ex uno theoremate sæpius inferri.

Horum exemplo ad noui aliquid audendum excitatus duobus ab hinc annis Minimorum aggressus sum meditationem, quæ fortè quartæ propositioni libri secundi, quem Apollonius de Locis planis, teste Pappo in præfatione libri septimi scripsit, non leuem incrementum accipiet cum ea, quæ de punctis in plano, & figuris eiusdem speciei demonstrantur

monſtrauit Apollonius, ad qualibet puncta in ſolido vtcumque diſpoſita, & ad omnes figuras, vel ſpecies diſſimiles in hoc opere extenſa, & promota ſint, ac communi Geometria, methodo ſcilicet omnibus nuda Elementorum cognitione inſtructis intelligibili, perſpicuè demonſtrata.

Primus labor totus fuit in determinando puncto, ex quo minima ſumma figurarum ſimilium, vel diſſimilium erat colligenda ſpecies plana, vel ſolida à punctis conſtituta nulla facta commemoratione. Hoc punctum determinatum centrum minimum *appellare libuit, quia ex eo minima ſumma colligitur, & centrum etiam eſt ſphæræ cuius ſuperficies locus ſit in quo inflexa recta, quarum ſpecies datam habeant rationem cuilibet ſpatio dato, conueniant.*

Quo exantlato labore animum applicui ad conſiderandas proprietates ex centro minimo in determinatis planis ac ſolidis ortas. Geometria quidem Magna eſt, & ad ſummum faſtigium ab antiquis, & recentioribus euecta, ſed quia illius magnitudo in Minimis apparet etiam, ideò appellandam cenſui Geometriam Magnam in Minimis.

Totum igitur opus in tres partes diſtribuo. Prima agit de Minimis, eorumque centro, & Problema reſolvit, quod, cum vniuerſale ſit, & Catho-

tholico Regi sacratum, Catholicum *dicitur Secunda autem agit de Figuris planis, & plura de ordinatis non innucunda concludit. Tertia vero Solida considerat, & exsequitur, quæ in nostro* Euclide Novo-antiquo *scienter omissa sunt de solidis Regularibus In fine cuiuslibet Partis problemata adducuntur seorsim, ne praxis speculationem confunderet.*

Hæc totius operis materia, & distributio est quingentis propositionibus demonstrata: harum ordo a principio in finem cuiuslibet partis continuata serie procedit, ne citationum varietas Lectori nostem offunderet. Primum ergo volumen 100. *Secundum* 200. *Tertium* 200. *etiam continet propositiones. Euclidis elementa, quæ passim intra parentheſim citata adducuntur, intelligenda sunt de nostro* Euclide Novo-antiquo, *fas enim esse duxi ad nostrum opus amandare Lectorem, cum potuerim aliorum exemplo communis Geometriæ citationem omittere*

Hæc sunt benigne Lector de quibus te monitũ volui, si paralogismum inveneris, illius demonstrationem expecto paratus, ubi primum monitus fuero palinodiam canere, ne errores pertinacia incrementum accipiant. Si autem omnia rite demonstrata sint, & opus Geometris non displicere videro ad alia me accingam, & propediem Sphæ-

ram, & Trigonometriam applicatam orbi literario ſiſtam, quæ ſecutura Aſtronomiæ ſternant viam, quibus accedet Trigonographia Datorum Euclidis non ignobile incrementum, nec manum è tabula amouebo, donec integrum Matheſeos curſum Deo fauente perficiam. Vale.

FACVLTAS ORDINARII.

Imprimatur

Lic. D. Ioannes de Zeballos, Vic. Tol.

FACVLTAS R. P. PROVINCIALIS

Toletanæ Prouinciæ Societatis Iesv.

Imprimatur. *Didacus de Valdes.*

CITATIONVM EXPLICATIO.

Elementa Geometriæ citãtur eadem prorsus ratione, ac in Euclide Novo-antiquo.
(3.*P.*) Tertium Proæmiale
(4.*l.*2.) Quarta libri secundi.
(3.*p.*5.) Tertium probl. praxi 5 Geom. Pract.

Propositiones huius citantur simpliciter, vel addita M.1. vel M 2.
(60.*p.*) Sexagesima eiusdem Partis.
(30.M.1.) Trigesima Partis 1. Minimorum.
(12.M.2.) Duodecima Partis 2. Minimorum.

NO-

NOTARVM EXPLICATIO.

△. Triangulum quodlibet.
△. Triangulum Rectangulum.
▭ vel □. Rectangulum quodlibet.
□. Quadratum.
◇ vel ◇. Rhombus.
⏢. vel ⏢ Trapezium.
⬠ Pentagonum quodlibet.
⬡. Hexagonum quodlibet.
+. Plus, vel summa.
—. Minus, vel differentia.
Centr. ff Centrum figurarum.
Centr ff ff Centrum figurarum similium.
Centr ff dd. Centrum figur. dissimilium.
æq. vel *æqu.* æquantur.

ERRO-

ERRORES IN LITERIS.

Pag.	Lin.	Error.	Corrige.
18.	15.	ABC.	AFG.
18.	19.	BN.	LN.
21.		ABC.	ABD.
23.	9.	BC.	EC.
27.	7.	GA.	GH.
	9.	eraqdum.	tratum.
32.	18.	(4.p.)	(4.p.)
40.	16.	PQR.	PQS.
48.		(33.p.)	(34.p.)
54.	6.	(18.p.)	(38.p.)
80.	24.	C.D.E.	C.D.
88.	20.	Interſe.	Inter.
94.	20.	BH.	GH.
	26.	LM.	L.
97.	25.	XZ.	XY.
101.	10.	cum.	cumque.
103.	15.	omibus.	omnibus.
105.	2.	FGH.	GH.
108.	15.	QR.	QS.
111.	26.	puncta.	ad puncta.
119.	22.	TT.	FT.
123.	12.	SX	SZ.
128.	5.	*vb.*	*vn.*
	6.	*an.*	*ua.*
132.	12.	Fig.23.	Fig 36.
	24.	*uz.*	*u*
134.	14.	Fig.24.	dele.
135.	11	*est*	*st.*
137.	14.	26.& 27.	28 & 29.
138.	19.	Fig 24.	Fig 36.
	24.	Fig 25.	Fig 37.
140.	24.	GHN.	PQ.

ERRO-

ERRORES IN CARACTERIBVS.

Pag.	Lin.	Error.	Corrige.
8		⊠ABP+⊙.	2⊠ABP+2⊙.
34	11.	−⊙EFH.	+⊡EFH.
117.		+4⊡SQ.	+⊡SQ.
132.	18.	⊙.	⊙T.
140	22.	□Z.	□X.
142.	22.	+⊙GM.	+⊙FM.
152.	18.	+△MP.	−△MP.

GEO-

GEOMETRIA MAGNA IN MINIMIS.

PARS PRIMA.

PROBLEMA CATHOLICVM RESOLVITVR.

CATHOLICO, ET MAXIMO

CAROLO II.

HISPANIARVM REGI

SACRATVM.

******
***
*

CAPVT I.

DE FIGVRIS MINIMIS.

Nihil est in quantitate minimũ, si vnum tollatur punctum indubitabile, quod dubium est an in magnitudine reperiatur. Reliqua omnia siue spatia, siue corpora sint, Minima dicuntur non absolute, sed respectiue: nempè quorum summa ex certo puncto, vel supra datam rectam, omnium possibilium, quæ iisdem similia efformari possunt, minima est.

Compendij, & claritatis gratia characteribus vtimur ad declarandas figuras iisdem similes, quæ sæpius nominanda occurrunt △ *Triangulum quodcunque significat* ▵ *Triangulum rectangulum.* □ *Quadratum* ▭ *Rectangulum.* ▱ *Rhombum* ⏢ *Trapezium* ⬠ *Pentagonũ* ⬡ *Hexagonum* *Hæc* + *significat* Plus, *vel summam* *Hæc* − Minus, *vt* △ *B* + □ *C hoc est Triangulum B plus Quadratum C vel summa Trianguli B & Quadrati C. Similiter* ▭ *D* − ⬠ *E. Rectangulum D, minus Pentagonum E. vel differentia Rectanguli D. & Pentagoni E.*

PRO-

PROPOSITIO I.

SI recta sit inæqualiter diuisa, figuræ similes ex tota recta, & differentia partium duplæ sunt earum, quæ ex partibus inæqualibus fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt recta A D. inæqualiter diuisa in B & sumatur B E. ipsi B D. æqualis, eritque A E. differentia partium. Dico quaslibet figuras similes supra totam A D. & partium differentiam A E. duplas esse similium supra inæquales partes A B. B D.

DEMONSTRATIO.

QVadrata totius A D. & differentiæ A E. dupla sunt. Quadratorum ex partibus inæqualibus A B. B D. (2. l. 2.) sed omnes figuræ similes sunt in eadem ratione quadratorum, nempè in duplicata ratione laterum homologorum (4. l. 6.) Ergo omnes figuræ similes supra totam A D. & differentiam A E. duplæ sunt similium supra inæquales partes A B B D. (1. l. 5.) Hoc est □ A D + □ A E. æquãtur 2 □ A B + 2 □ B D. Quod erat demonstrandum.

Hæc propositio est 10 *lib.* 2. *Elem.* ad omnes figuras similes extensa.

PROPOSITIO II.

SI recta ſit æqualiter, & inæqualiter diuiſa, figura ſimiles ex partibus inæqualibus dupla ſunt earum quæ ex dimidia recta, & ex interſegmento fiunt.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt recta CF. diuiſa æqualiter in G. & inæqualiter in H. Dico quaslibet figuras ſimiles ſupra inæquales partes CH HF eſſe duplas earum quæ ex dimidia recta CG. & ex interſegmento HG. ſimiles fiunt.

DEMONSTRATIO.

QVadrata ex partibus inæqualibus CH HF. ſunt duplicia quadratorum ex dimidia CG. & interſegmento HG (3.l.2.) Sed omnes figuræ ſimiles ſunt in ratione quadratorum; nempè in duplicata ratione laterum homologorum (4.l.6) Ergo omnes figuræ ſimiles ſupra CH HF. ſunt duplæ earum, quæ ex CG. HG fieri poſſunt (1.l.5.) ſcilicet □ CH + □ HF. æquantur 2 □ CG. + 2 □ HG. Quod erat demonſtrandum.

Hæc propoſitio eſt 9 *lib.* 2. *Elem* ad omnes figuras ſimiles extenſa.

PRO-

PROPOSITIO III.

IN quolibet rectilineo si duo similia inscribantur communi angulo, & æquali excessu.

1. *Maius superat medium gnomone minori, & duplici figuræ simili ex laterum differentia.*

2. *Maius superat Minus duplici gnomone minori, & duplici figuræ simili ex differentia.*

3. *Maior gnomon minorem superat, & cõplementa maiora etiam minora iisdem 2 figuris.*

4. *Complementa maiora superant gnomonem minorem una simili figuræ ex differentia.*

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN rectilineo ▱ ADG inscripta sunt similia ▱ ABO. & ▱ AEQ æquali basium excessu E B. BD. Dico 1. ▱. ADG superare ▱ ABO. toto gnomone minori EPQI + 2 ▱ PYF. Dico 2. ▱ ADG. superare ▱ AEQ in 2 EPQI + 2 ▱ PYF. Dico 3. Gnomonem BFOH. superare EPQI. in 2 ▱ PYF. & similiter complementa DP + PGI. superare BL. + LOK. in 2 ▱ PYF. Dico 4. complementa DP +. PGI. superare EPQI. toto ▱ PYF.

DEMONSTRATIO.

1. CVm recta AD. sit inæqualiter diuisa in B. & AE. sit differentia, erunt ▱ ADG + ▱ AEQ. ex tota, & differẽtia, æqualia 2 ▱ ABO +

2 PYF. hoc eſt 2 □ AB + 2 □ BD (1. p.) Ergo ſi vtrinque auferatur commune □ AEQ. erit □ ADG æquale □ ABO + gnomoni EPQI. + 2 □ PYF. Ergo □ ADG ſuperat medium □ ABO. toto gnomone minori EPQI + 2 □ PYF. ex laterum differẽtia PY. vel BD. quæ æquales ſunt (7 l. 1.) Quod erat primum, &c.

2. Quia □ ADG. ſuperat □ ABO in EPQI + 2 □ PYF. ſed □ ABO. ſuperat □ AEQ in EPQI Ergo □ ABG. ſuperat □ AEQ. duobus gnomonibus EPQI. + 2 □ PYF, &c.

3. Quia □ ADG. ſuperat □ ABO toto gnomone BFOH etiam gnomone EPQI + 2 □ PYF. ex *num.* 1. erit gnomon BFOH. æquale EPQI. + 2 □ PYF. Ergo etiam ſi ab vtroque gnomone EPQI & BFO. auferantur æqualia □ LP & □ PF. remanebunt complementa DP + PGI æqualia complementis BL + LOK. + 2 □ PYF. &c.

4 Ergo ſi tantum ex maiori gnomone BFOH auferatur □ PYF. complementa DP + PGI æqualia erunt gnomoni EPQI. + □ PYF. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO IV.

DAto quodlibet rectilineo ſi alia duo ſimilia circa diagonium inſcribantur, & aliud fiat ex inſcriptorum baſium differentia: datum, & factum duplicia ſunt inſcriptorum.

2. *Si datum, & factum duplicia ſunt inſcriptorum, factum erit ex baſium differentia.*

EXPOSITIO. Fig. 2.

SI datum rectilineum ▱ADF. & circa diagonium AF inſcripta ſimilia, nempè ▱ABP. & ▱PYF. cum ex inſcriptione omnia latera ſint parallela (4. l. 6.) erunt PY. BD. æquales rectæ (7. l. 1.) ſi ergo ſumatur BE æqualis ipſi BD vel PY, erit AE differentia baſium AB. & BD vel PY. & in *caſu* 1 cadet E intra AB. & in *caſu* 2. cadet extra: ſi ergo fiat ſupra AE ▱AEL. Dico ▱ADF + ▱AEL. æqualia eſſe 2 ▱ABP. + 2 ▱PYF.

DEMONSTRATIO.

IN *caſu* 1. cum BD. BE ſint æquales eſt AD. inæqualiter diuiſa in B & AE. eſt differentia partiũ AB. BD. Ergo ▱ADF. + ▱AEL. æquãtur 2 ▱ABP + 2 ▱BD vel PYF (1 p.)

In *caſu* 2 cum BD. BF. ſint æquales eſt recta ED æqualiter diuiſa in B & inæqualiter diuiſa in A. Ergo ▱. ADF. + ▱ AEL. partium inæqua-

æqualium æquantur 2 □BD. vel PYF + 2 □ ABP nempè ex dimidia, & interſegmento (2. p) Quod erat, &c.

Conuerſa patet Sit □ADF + □Zz æquale □ABP. + □PYF. Dico Zz. eſſe differētiam inter AB & PY vel BD. Sit enim differentia AE. Ergo □ADF. + □AE. æquantur 2. □ABP + 2□ PYF. vt demonſtratum eſt: ſed etiam ex hypotheſi □ADF + □Zz. æquātur inſcriptis □ AB P. + □PYF. Ergo □Zz æquatur □AE Ergo cū figuræ ſint æquales, & ſimiles congruent (1. p.) & baſis Zz. erit æqualis AE ſcilicet differentiæ baſium AB. PY. Quod erat demonſtrandū.

PROPOSITIO V.

IIſdem poſitis, rectilineum quod ex baſium differentia fit cum complementis eorum, quæ circa diagonium ſunt, æquantur eis quæ circa diagonium ſunt conſtituta: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 2.

IN caſu 1. & 2 ſunt □ABP & □PYF circa diagonium AF. & □AEL. ſit ex differentia baſiū AB & BD vel PY. Dico □AEL cum complementis DP PH. æquari □ABP. + □PYF circa diagonium.

DEMONSTRATIO.

QVoniam □ADF + AEL. æquantur 2 □AB P. +

P +2 ▢PYF. (4.p.) sed ▢ADF. componitur ex ▢ABP+ ▢PYF+ DP +PH. Ergo ▢ ABP + ▢PYF +DP +PH + ▢AEL. æquantur 2 ▢ ABP+2 ▢PYF.(3.p.) Ergo si ex vtraque parte semel auferantur ▢ABP + ▢ PYF. remanebunt ▢AEL+complem.DP.PH æqualia ▢A BP+ ▢PYF. Quod erat demonstrandum.

Econuerso si ▢Z+DP+ PH. æqualia sint ▢ ABP+ ▢PYF.erit Z. differentia inter AB PY Quod demonstrabitur vt in præcedenti.

PROPOSITIO VI.

SI recta sit in quaslibet duas figuras diuisa, habentes æqualia complementa cum æquali basium excessu: & in ea licet continuata sumatur quodlibet aliud punctum: figuræ datis similes, quæ ex assumpto ad terminos rectæ collocantur superant datas totidem similibus ex intersegmẽto: & ècontra.

EXPOSITIO. Fig. 2.

SIt recta AC. diuisa in B & supra AB ▢ABO, & supra BC. ▭BCZ. sumãtur præterea æquales excessus BE. BD. & circunscribatur simile ▢ADG & simile ▭CEX. Si complementa D P+PGI æqualia sint complementis ER+RX. erunt ▢ABO & ▭BCR figuræ æqualium cõplementorum cum æquali basium excessu

Insuper in recta AC licet continuata sumatur quodlibet punctum E quod in *casu* 1. est intra terminos AC & in *casu* 2. extra Tandem supra AE fiat ▱AEQ & supra CE ▭CEM Dico ▱AEQ + ▭CEM superare figuras æqualium complementorum, nempè ▱ABO + ▭BCZ. duabus figuris similibus ex intersegmẽto EB. nempe vno ▱EB + ▭EB & è contra.

DEMONSTRATIO.

SVmatur BD æqualis BE. & circunscribatur ▱ADG. eritque ▱AEQ cum complementis DP + PGI. æquale ▱ABO + ▱PYF. circa diagonium (5. p.) sed complementa DP + PGI sunt æqualia complementis ER + RX. ex hypothesi Ergo ▱AEQ + ER + RX. æqualia sunt ▱ABO + ▱PYF. Ergo si vtrique parti æquali addãtur communia, nempe ▭CBZ + ▭NRM. erunt ex vna parte ▱AEQ + ER + RX + ▭CBZ + ▭NRM æqualia ipsis ▱ABO + ▱PYF + ▭CBZ + ▭NRM sed ▭CEM. componitur ex ▭CBZ + ▭NRM + ER + RX Ergo ▱AEQ + ▭CEM æquantur ▱ABO + ▱PYF + ▭CBZ + ▭NRM Ergo ▱AEQ + ▭CEM. superãt ▱ABO + ▭CBZ. toto ▱PYF + ▭NRM. sed ▱PYF est supra basim PY æqualem BD. (7 l 1.) vel EB ex cõstructione. tum ▭NRM. est supra basim NR æqualem etiam EB. Ergo

▱A

⬠AEQ+▭CEM. superant ⬠ABO+▭CBZ. duabus figuris similibus ex intersegmento EB. nempe ⬠EB+▭EB. Quod erat demonstrandum.

E converso. Si AEQ. CEM. superant ABO. CBR. duabus similibus ex EB. nempe ⬠EB+▭EB dico ⬠ABO & ▭CBR habere æqualia complementa. Sumatur enim BD. æqualis EB. & circunscribatur ⬠ADG. Ex hypothesi ⬠AEQ+▭CEX. æquantur ⬠ABO+CBZ +⬠EB+▭EB sed ▭CEX æquatur ▭CBZ+ RM. vel ▭EB+ER+RX ex quibus componitur: ergo ⬠AEQ+▭CBZ+▭EB+ER+RX. æquantur ⬠ABO+▭CBZ+▭EB+⬠EB Ergo ablatis vtrinque communibus ▭CBZ+▭EB. remanent ⬠AEQ+ER+RX æqualia ⬠ABO+⬠EB. vel ⬠LP. sed ⬠ABO. componitur ex ⬠AEQ+⬠LP+BL+LOK Ergo ⬠AEQ+ ER+RX. æquantur ⬠AEQ+BL+LOK+2⬠LP. Ergo ablato communi ⬠AEQ. remanent complementa ER+RX æqualia ipsis BL+LOK+2⬠LP. sed etiam complementa DP+PGI æquantur BL+LOK+2 LP (3p) Ergo complementa ER+RX. æquantur complementis DP+PGI. Ergo ⬠ABO & ▭CBZ habent æqualia complementa. Quod erat, &c.

PROPOSITIO VII.

SI ex eodem rectæ puncto vtrinque sint constitutæ figuræ, vt summa summæ æqualia habeat complementa. similes figuræ ex quolibet alio rectæ puncto superabunt datas totidem figuris similibus ex intersegmento: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 1.

SIt recta GC & in ea punctum B & ad vnam partem supra BA. BG sint constitutæ figuræ, & aliæ supra BK BC ita vt summa complemẽtorum figurarum BA. BG æqualis sit summæ complementorum figurarum BK. BC. & assumatur in recta quodlibet aliud punctum E Dico figuras datis similes supra EA EG EK. EC superare datas supra BA BG. BK. BC. totidem figuris ijsdem similibus ex intersegmẽto BE.

Claritatis gratia distinguantur figuræ, & sint supra BA. semi circulus: supra BG. triangulum æquilaterum: supra BK semi ellipsis: & supra BC triãgulum rectangulum. Et similiter supra EA. EG. EK EC. prout in figura apparet.

DEMONSTRATIO.

QVoniam △ L. cum complemento F. æquatur △ H + △ I. circa diagonium (5 p.) & T + R. æquatur S + Z (5. p.) sed complementa

F +

F+R æqualia ſunt N+Q. ex hypotheſi: Ergo △L+T+N+Q æquantur △H+I+S+Z: Ergo ſi vtrique parti addantur communia M+Y+P+V. erunt etiam L+T+N+Q+M+Y+P+V æqualia ipſis H+I+S+Z+M+Y+P+V. ſed M+Y+N. componunt X. & P+Q+V. componũt O. Ergo L+T+X+O. æquantur H+I+S+Z+M+Y+P+V. Ergo L+T+X+O ſuperant H. M. S. P. in quatuor figuris L. Y. Z. V. ſed L. T. X. O. ſunt figuræ datis ſimiles ex EC. EK. EA. EG. & figuræ H. M. S. P. ſunt ex BC. BA. BK. BG. & figuræ I. Y. Z. V. ſunt omnes ex interſegmento BD. vel BE. Ergo figuræ ex puncto aſſumpto E. ſuperant datas ex B. totidem figuris ſimilibus ex interſegmento EB. Quod erat demonſtrandum.

Eadem eſt demonſtratio licet plures ſint in vna parte, quàm in alia.

Converſa etiam ordine retrogrado demonſtratur ſicut in præcedenti, & ne actum agere videar demonſtrationem omnitto.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Figuræ quæ cum æqualibus basium excessibus habent æqualia complementa, minimæ sunt ex similibus, quæ ad basium terminos constitui possunt: idemque est de summa ad summam, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig 2.

SInt ▱ABO & ▭CBZ æqualium complementorum: & bases in directum positæ habeant commune punctum B. Dico illas esse omnium minimas, quæ ad terminos A, C. ipsis similiū constitui possunt.

DEMONSTRATIO.

SVmatur in AC. quodlibet punctum E & ▱AEQ+▭CEX. superabunt ▱ABO+▭CBZ vno ▱EB+▭EB (6 p) Ergo ▱ABO+▭CBZ. sunt omnium minima. Idem demonstrabitur de summa ad summam, & de vna figura ad alterius summam ex 7 p. Quod erat, &c.

Econuerso si ▱ABO. & ▭CBZ sunt omniū minimæ, dico habere æqualia complementa: aliter habeant ▱AEQ & ▭CEX æqualia cōplementa: Ergo ▱ABO+▭CBZ superarent ▱AEQ+▭CEX duabus similibus figuris ex intersegmento EB (6.p.) Ergo ▱ABO. & ▭CBZ. non essent minimæ cōtra Hypothesim.

Ea-

Eadem est demonstratio de summa ad summam, &c.

PROPOSITIO IX.

Figura, vel summa quæ cum eadem tertia figura, vel summa sunt minimæ, etiam inter se minimæ sunt.

2. *Si duæ figuræ, vel summæ duabus alijs inter se minimis, seorsum minimæ sint, etiam inter se minimæ erunt omnes*

EXPOSITIO.

SInt figuræ A B C D. &c. si A & B sint ipsi C. minimæ dico esse inter se minimas. Tum si A sit minima C. & B sit minima D. & C. D. minimæ fuerint dico A. B. C. D. omnes esse inter se minimas.

DEMONSTRATIO.

CVm A & B sint minimæ C. habent cum illa æqualia complementa (8 p.) Ergo & inter se habent æqualia complementa (3 p.) Ergo sunt minimæ inter se (8 p.)

2. Cum C D supponantur minimæ & A. sit minima C. erit etiam minima ipsi D similiter B & C Ergo etiam A & B &c. Eadem est demonstratio de summa ad summam, vel de vna figura ad aliarum summam.

PRO-

PROPOSITIO X.

TRiangula, vel parallelogramma æquè alta, habent æqualia complementa, & sunt minima, & econuerso.

EXPOSITIO, Fig. 4.

TRiangula ABC. BDE. habent æqualem altitudinem, nempè sunt vel possunt esse inter easdem parallelas (8. l. 1.) dico illa esse interse minima: & si sunt inter se minima, dico habere æqualem altitudinem. Idemque est de parallelogrammis.

DEMONSTRATIO.

SVmantur AL. DF. æquales excessus basium: & sint IK. FH. lateribus AC. DE. parallelæ: complemēta, vel parallelo gramma AL. DG. inter parallelas, & supra æquales bases AI DF. sunt æqualia (8. l. 1.) Ergo triangula ABC BDE cùm habeant æqualia complementa sunt minima (8 p) Idem est de parallelogrammis cum sint triangulorum dupla (8 l 1)

Cōuersa patet: quia si sunt minima habent æqualia complemēta (8 p) quæ sunt parallelogramma cum æquali basi, vel excessu. Ergo habent æqualem altitudinem (8 l. 1.) &c.

PRO-

PROPOSITIO XI.

SI Triangulum habeat duplam parallelogrammi altitudinem, sunt inter se figuræ minimæ, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 5.

TRiangulum ABC habeat duplam altitudinem parallelogrammi DF. dico esse figuras minimas: & si ABC minimum sit ▭DF. dico triangulum ABC habere duplam altitudinem parallelogrammi DF.

DEMONSTRATIO.

Sumantur DG AM. æquales basium excessus & sit BEI diameter, & GI. IL. parallelæ ipsis DEK FEH & MP parallela AC. Complementa GE EL æquantur (41 6) Sed ▭AO est duplum GE cùm habeat duplam altitudinẽ supra basim AM. æqualem DG (8.l.1.) Ergo complementum AO. æquatur complementis GE. EL. Ergo cum ABC. & DF. habeant æqualia complementa, erunt figuræ minimæ (8 p) Quod, &c.

E conuerso. Si ABC minimũ sit DF. est AO. æquale LE+EG (8. p.) hoc est 2 EG. Ergo cum bases sint æquales MA DG. erit altitudo OA. dupla GE. (8 l.1.)

PROPOSITIO XII.

SI in quolibet Polygono diagonium cum baſi, & latere faciat triangulare ſegmentum, cuius altitudo ſit ad cuiuſvis trianguli altitudinẽ, vt ſegmentum triangulare ad totum Polygonum, hos, & triangulum erunt inter ſe minima, & è conuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 6.

SIt ⏢ ABCDE. & diagonium ACN faciens ſegmentum triangulare ABC. cuius altitudo ſit TI. & ſit quodlibet △AFG. cuius altitudo IH. Si altitudo IT. triangularis ſegmenti ABC ſit ad altitudinem IH. Trianguli AFG. vt ſegmentum ABC. ad ⏢ ABCDE. Dico △ ABC & ⏢ ABCDE. eſſe figuras minimas ſupra baſium ſummam FB.

DEMONSTRATIO.

SVmantur BL & FK. æquales, & ductis parallelis BN. NQ. QR. erit circunſcriptum ⏢ ALNQR. & ſimiliter inſcribatur ⏢CMNOP & ducatur KHS parallela FG.

Complementum LC. ad ſummam complementorum LC+CQE. eſt vt ſegmentum ABC. ad Polygonum BCDE (4 l 6) vel ex conſtructione vt IT. ad IH. ſed parallelogrammum FZ. ad FH. eſt vt altitudo IT. ad IH. (1 l. 6.)

6.) Ergo vt LC. ad LC+CQE ita FZ. ad FH. (1 l 5.) & alternando vt LC. ad FZ ita LC+CQE ad FH (4 l 5) ſed parallelogramma LC. FZ ſupra æquales baſes FK. BL. & inter parallelas IL. TM æquantur (8 l. 1.) Ergo etiam cõplementa LC+CQE æquantur complemento FH (2. l. 5.) Ergo △FAG. & ▭ABCD. cum habeant æqualia complementa, ſunt inter ſe figuræ minimæ (8. p.) Quod, &c.

E conuerſo. Si △FAG & ▭ ABCD. ſint minima, erit complementum FH æquale complementis LC+CQE (8 p.) & FZ. æquale LC. vt FH. æquale LC+CQE. ſed vt IT. ad IH ita FZ. ad FH (1. l. 6.) Ergo vt IT. ad IH ita LC. ad LC+CQE (2. l. 5.) hoc eſt ita ſegmentum ABC. ad Polygonum ABCDE (4. l. 6.) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

QVadrilaterum habens duo latera parallela eſt ad triangulare ſegmentum, vt ſumma eorundem laterum ad latus quod eſt in triangulo. & ſegmenta ſunt vt latera parallela & è conuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 7.

IN ▭ ABCD. ſi AD BC. ſint latera parallela, & diagonium BD. vel AC faciant triangularia

ſegmenta. Dico totum ▭ ABCD ad △ ABD. eſſe vt AD+BC. ad AD. latus △ ABD. vel ▭ ABCD eſſe ad △ ABC. vt AD+BC. ad BC. latus △ ABG. Item ADB. ad BDC. eſſe vt AD. ad BC.

DEMONSTRATIO.

QVoniam △ ABD. & △ BCD. ſunt inter parallelas AD. BC. ſe habent vt baſes AD BC. (1. l. 6) Ergo etiam componendo ſumma △ BCD+△ BAD erit ad △ DAB. vt ſumma laterum BC+DA. ad DA (4. l. 5.) & △ ADC+△ ABC ad △ ABC. vt AD+BC. ad BC. Quod erat demonſtrandum.

Econuerſo Si ſegmentum ADB. ad BCD ſe habet vt AD ad BC. dico AD. & BC. eſſe latera parallela Fiat enim BE æqualis AD. & ducatur DE. BED. ad BCD. eſt vt BE. ad BC (1. l. 6) hoc eſt vt AD ad BC. ſed etiam ex hypotheſi triangulum ADB. ad BCD eſt vt AD ad BC Ergo △ ADB æquale eſt △ BDE (2 l 5.) Ergo cum habeant æquales baſes AD. BE. erunt inter parallelas (8 l 1.) Ergo AD. BE. ſunt parallelæ. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XIV.

IN quolibet Trapezio recta per angulum diagonio parallela secat latus continuatum in ratione Trapezij ad triangulare segmentum, & in ratione segmentorum inter se.

EXPOSITIO. Fig. 8.

SIt □ ABCD. & diagonium BD. & ex angulo C ducatur CE ipsi BD parallela, quæ occurrat lateri AD. continuato in E. Dico segmentum △ABC ad △BDC esse vt AD. ad DE. & etiam △ABC. ad □ABCD. esse vt AD. ad AE.

DEMONSTRATIO.

SIt recta AGH. perpendicularis vtrique parallelæ BD. CE. & erit GH. altitudo trianguli BDC. & GA. altitudo trianguli BDA Ergo cum basis BD. sit communis △BDA. & △BDC. erit △BDA. ad △BDC. vt altitudo AC. ad altitudinem CH (1.l.6.) sed AC ad CH. est vt AD. ad DE (2.l.6.) Ergo △BDA. ad △BDC est vt AD ad DE (1.l. 5.) Ergo componendo △BDA. ad △BDA+△BDC. hoc est ad □ABCD erit vt AD. ad AD+DE (4 l. 5 Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XV.

PEntagonum regulare eſt ad triangulare ſegmentum, vt ſumma laterum huius ad latus ipſius pentagoni.

EXPOSITIO. Fig. 9.

SIt ⬠ABCDE. & diagonium CE Dico ⬠ABCDE. ad ſegmentum △CDE. eſſe vt ſummã laterum △CDE. ad latus ⬠ABC. hoc eſt vt CD.+DE+EC ad CD.

DEMONSTRATIO.

DVcatur diagonium CA. & deſcripto arcu DF iungatur EF. cum arcus DE EA ſint æquales ex æqualibus chordis (2. l 3) etiam anguli DCE. ECA. ſunt æquales (3 l 3.) latera vel radij CD CF etiam æquantur & CE. latus commune eſt △DCE. & △ECF. Ergo ſunt triangula omninò æqualia (4. l. 1.) ſed △AEC. ad △DCE. vel ad △FEC eſt vt AC ad FC (1. l. 6) hoc eſt vt EC. ad DC. & △ABC ad △DCE. eſt vt CB ad DC. vel ED ad DC, & etiam △DCE. ad △DCE eſt vt DC. ad DC. Ergo componẽdo △ABC+△ACE+△EDC ad △EDC. eſt vt DE+EC+CD ad DC (4 l. 5.) Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

HExagonum regulare ad triangulare ſegmentum eſt in ratione ſextupla.

DEMONSTRATIO. Fig. 10.

SIt ○ ABE. & diagonium C E Dico totum ○ ABE ad △EDC. eſſe vt 6. ad 1.

Ductis enim A E. AC. tum ex centro GA. GE GC. & fient 6. triangula, quæ ſupra æquales baſes A E B C. C A habent reliqua latera æqualia, ex ipſa Hexagoni conſtructione: Ergo omnia 6 triangula erunt æqualia (4. l. 1.) Ergo totum Hexagonum ABCDEF. ad △ED C erit vt 6. ad 1. vel ſextuplum. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

LIcet ratio Pentagoni, vel Hexagoni ad ſuũ triangulare ſegmentum, vniuerſaliter determinetur etiam pro omnibus Polygonis irregularibus in ſequenti propoſitione: Determinationes iſtæ ſpeciales omittendæ non fuere, quia in Minimorum praxi earum vſus, facilior, & expeditior eſt.

PROPOSITIO XVII.

IN quolibet Polygono ſi ex angulis continuentur diagonijs parallela in continuata latera, determinant ſegmentorum rationes, & rationem Polygoni ad triangulare ſegmentum.

EXPOSITIO. Fig. 11.

SIt Polygonum Heptagonum ABEG & diagonia BD BE. BF BG. Ducatur CH. parallela BD. & HI ipſi BE & IK. ipſi BF. & KL. ipſi BG. Iterùm DR. parallela BE, &c. prout in figura apparet. Dico △BCD. ad △BDE. eſſe vt LM. ad MN & △BDE. ad △BEF. eſſe vt MN. ad NO. &c. & Heptagonum ABEG. ad ſegmẽtum △ABG. eſſe vt tota AL. ad latus AG.

DEMONSTRATIO.

IN Trapezio BCDE. eſt △BCD ad △BDE vt DH ad DE (14 p.) hoc eſt vt IR. ad RE. vel K Q ad QP. vel LM. ad MN. ex parallelíſmo (2. l. 6)

Iterùm in trapezio BDEF. eſt △BDE. ad △BEF. vt RE ad EF (14 p.) vel vt QP. ad PF. vel vt MN ad NO (2. l 6)

Rurſus in ▱ BEFG eſt △BEF. ad △BFG. vt PF. ad FG (14 p.) vel vt NO ad OG (2. l 6)

Tandem in Trapezio ABFG. eſt △BFG. ad △ABG. vt OG. ad GA (14 p.)

Ergo

Ergo componendo summa triangulorum, nempe ΔBCD+ΔBDE+ΔBEF+ΔBFG+ΔABG ad triangulum ABG. erit vt summa rectarum, nempè vt LM+MN+NO+OG+GA ad ipsam GA (4.l.5.) sed summa triãgulorum est totum Heptagonum, vel Polygonum ex ipsis compositum: & summa rectarũ est tota recta AL ex ipsis composita: Ergo totum Polygonum Heptagonum ABCDEFG. ad triangulare segmentum ABG est vt tota recta AL ad latus AG (2.l.5.) Quod erat, &c.

CONSECTARIA.

PArallelæ ex primo angulo C nempe CH. HI IK KL, determinant Polygoni rationem secluſis alijs.

2. Cuiuſvis trianguli ad quodlibet aliud ratio determinatur interſegmentis correſpondentibus Sic ratio ΔBDE ad ΔBFG. est vt MN ad OG &c.

PROPOSITIO XVIII.

SI Triangulum habeat æqualem altitudinem cum termino parallela determinantis rationem Polygoni ad triangulare segmentum, est Triangulum Polygono minimum.

2 *Etsi habeat æqualem basim erit Polygono æquale.*

EXPOSITIO. Fig. 12.

SIt ⏢ABCDE. & CF FG determinent rationem ⏢ABCDE ad △ABE vt AG. ad AE (17. p.) Ducta GI. basi AB parallela Dico quodlibet triangulum inter AB. GI constitutum, vel habens altitudinem perpendiculi GH. esse minimum Polygono ⏢ABCDE.

Et si triangulum ABG habeat eandem basim AB. vel æqualem, & sit inter præfatas parallelas ABGI dico Triangulum esse Polygono etiam æquale.

DEMONSTRATIO.

SIt EO parallela BH, eritque OH. altitudo △ABE. sed GH ad HO. est vt GA. ad EA (21 6.) scilicèt vt ⏢ABCDE ad △ABE (17 p.) Ergo cum GH altitudo trianguli HAG. ad HO altitudinem segmenti △ABE. sit vt ⏢ABCDE. ad △ABE. erit △HAG. minimum ipsi ⏢ABCDE (12. p.) Quod eadem ratione concluditur

de

de quolibet alio triangulo inter parallelas GI. HB vel æquæ alto: Ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

2. Habeat Triangulum ABG. æqualem basim AB. vel eandē ipsius Polygoni: erit Triangulum ABG. ad Triangulare segmentum AB E vt altitudo GA. ad altitudinem OH (1.l.6.) vel vt GA. ad EA hoc est vt ▱ ABCD. ad idem triangulum ABE vt modo demonstrandum est: Ergo cum Triangulum ABG. eandem habeat rationem ad triangulum ABE. quam Polygonum ABCD. ad idem triangulum ABE, erit Triangulum ABG. æquale Polygono A B CDE (2.l.5.) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

SI in eodem Polygono ex vtroque latere supra basim parallela determinent rationē Polygoni, secabunt latera opposita in eadem altitudine vel quæ iungit determinationes est basi parallela.

EXPOSITIO. Fig. 12.

SIt ▱ ABCDE & ex A sint diagonia AD AC. eisque parallelæ EQ QS tum ex B. sint diagonia BD. BE ipsisque parallelæ CF. I G. Dico puncta G S. esse æquè alta, & G S parallelam esse basi A B.

DEMONSTRATIO.

COntinuata vtrinque basi AB ducantur ex G. & S quælibet tectæ GH SX facientes triangula HAG BXS. Ergo △HAG cum habeat æqualem altitudinem cum puncto G, est minimum ⬠ABCDE (18.p.) similiter △BSX. est minimum pentagono ABCDE. propter æqualem altitudinem cum puncto S. (18.p.) Ergo △HAG. & △BSX. sunt minima inter se (9 p.) Etgo sunt æque alta (10 p.) Ergo cum puncta G S. habeant æqualem altitudinem supra HX. est GS. ipsi parallela Quod erat, &c.

PROPOSITIO XX.

SI termini parallelarum determinantium rationes Polygonorum, habeant æqualem altitudinem, erunt Polygona inter se minima, & èconuerso.

2 *Polygona minima sunt inter se vt bases.*

EXPOSITIO. Fig. 12.

SInt ⬠ABCDE & ▭ KLMN & CFG. determinat rationem ⬠ABCDE ad △ABE. vt AG. ad AE (17 p.) & NI. determinat rationem ▭ KLMN ad △KLM (17.p.) Si puncta G & I. sint æquè alta, hoc est perpendicula GH IR. æqualia Dico ⬠ABCDE & ▭ KLMN esse inter se figuras minimas. & *èconuerso* si sint figu-

guræ minimæ, dico GH. IR. esse æqualia.

2 Dico Polygona inter se minima esse inter se vt bases.

DEMONSTRATIO.

CVm Triangulum HAG. habeat æqualem altitudinem cum terminis G. & I minimũ est vtrique Polygono (18. p) Ergo etiam Polygona AB◡DE. & KLMN sunt inter se minima (9. p.) Quod erat, &c.

Econtra. ⏢ AB◡DE. minimum est △HAG. & ⏢ KLMN. minimum est △LRI (18. p) Ergo si Polygona sunt minima etiam triangula (9 p.) Ergo vertices G I habent æqualem altitudinem (10 p.) Quod erat, &c.

2 Sint Polygona inter se minima ⏢ ABC DE & ⏢ KLMN & termini rationum æque alti G & I. ductisque rectis BG & KI erit △ABG. æquale Polygono ABCDE & △LKI. æquale Polygono KLMN (18. p.) Ergo Polygonu AB CDE ad Polygonum KLMN erit vt triangulum ABG. ad triangulum LKI (2 l. 5) sed triãgulum ABG. ad triangulum LKI est vt basis AB. ad basim KL. eo quod habeant æqualem altitudinem inter parallelas (1. l 6.) Ergo Polygonum ABCDE ad Polygonum KLMN est vt basis AB ad basim KL (1. l 5.) & cũ hoc perpetuo demonstretur de quibuslibet Polygo-

nis

nis minimis, erunt Polygona minima inter se vt bases. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

SI Triangulum pluribus alijs triangulis simul aeque altum sit, erit illud minimum ad aliorũ summam

2 *Idem est de Parallelogrammis inter se.*
3 *Et etiam de vna summa ad aliam.*
4 *Et èconuerso etiam in omnibus.*

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt Triangulum ABC cuius altitudo æqualis sit altitudinum summæ aliorum, nempè △ GHI+IKL+LMN quæ ita constituantur vt vnum supra alterius verticem sit, & bases habeant parallelas Dico Triangulum ABC minimum esse ad aliorum summam: *Et econuerso* si aliorum summæ sit △ ABC. minimũ; eius altitudo æqualis erit altitudinum summæ, &c.

DEMONSTRATIO.

SVmantur æquales basium excessus BD GZ. & sit DF parallela lateri BC & ZO OP PQ parallelæ lateribus GI. IL LN. Bases AB GH. in eadem recta, & KR MS NC ipsis parallelæ.

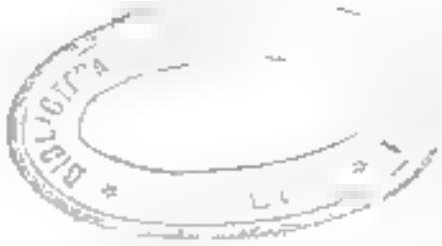
Oppositalatera in parallelogrammis æqualia sunt BD. CE. tum ZG OI. PL. QN (7 l 1) & cum

cum B D. GZ. sint ex constructione æqualia: omnia erunt æqualia inter se: Ergo ex æquali basi, & altitudine sunt parallelogrāma æqualia DR. GO. tum RS. OL. tum SG. LQ (8 l 1.) Ergo complementum DC in △ABC. æquale est complementis GO+OL+LQ triangulorum GHI. IKL. LMN. Ergo cum △ABC. habeat complementum æquale complementis aliorum erit △ABC minimum ad summam △GHI+△IKL+△LMN (8. p.)

2 De Parallelogrammis eadem est omninò demonstratio ex complementis

3 Si Triāgula ABR FRC. tribus alijs æque alta sunt, erunt etiam complemēta DR+RE æqualia complementis GO+OL+LQ Ergo summa summæ erit minima. & etiam in Parallelogrammis.

4 Si △ABC. minimum fit △GHI+IKL +LMN. erit complementum DC æquale cōplementis GO+OL+LQ (8 p.) Ergo cum bases BD ZG. sint æquales; erunt etiam altitudines æquales (8 l. 1) Quod erat, &c.



PRO-

PROPOSITIO XXII.

SI plures figuræ fuerint ſingillatim minimæ cũ aliis figuris ſummæ ſummæ erit minima

2 *Figuræ quæ ſit alicui ſummæ minima, etiã alteri ſummæ minima erit.*

EXPOSITIO. Fig. 13.

SIt △GHI minimum □ T. & △IKL. cum ⬠ V. & △LMN. cum ○X. Dico ſummam △GHI + △IKL + △LMN. minimum eſſe □ T + ⬠V + ○X.

DEMONSTRATIO.

CVm △GHI. minimum ſit □ T. erit complementum GO æquale complementis □ T (8 p.) tum OL. æquabitur complementis ⬠ V. & LQ complementis ○ X (8. p) Ergo ſumma complementorum GO + OL + LQ. æquatur ſummæ complementorum □ T + ⬠ V + ○X (4.p) Ergo ſumma △GHI + △IKL + △LMN minima eſt ſummæ □ T + ⬠ V + ○X (8 p)

2 Cũ ſumma △GHI + △IKL + △LMN. demonſtrata ſit minima ſummæ □ T + ⬠ V + ○X Si △ABC vel quælibet alia figura minima ſit priori ſummæ, etiam alteri minima erit (9 p.) Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerint plura Polygona, & altitudo alicuius trianguli sit ad altitudinem triangulariũ segmentorum, vt summa Polygonorum ad segmentorum summam, erit Triangulum summæ Polygonorum minimum, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SInt Polygona □ ABCD. & ○ EFH eorum summa ad summam segmentorum ABD + EFI. est vt summa AE + EK ad AD + EI (17 p) Sit ergo altitudo △ LOR ad altitudines △ ABD + EFI. etiam vt AE + EK. ad AD + EI Dico △ LOR esse minimum summæ □ ABCD + ○ EFH *& è contra.*

DEMONSTRATIO.

DVcantur quælibet EM KN & △ MAE erit minimum □ ABCD & △ NEK. ipsi ○ EFH (18 p) Ergo altitudo △ MAE ad altitudinem △ ABD erit vt AE. ad AD. & similiter altitudo △ NEK ad altitudinem △ EFI vt EK. ad EI. nempe vt Polygona ad segmenta (12 p.) Ergo summa altitudinũ △ MAE + △ NEK ad summam altitudinum segmentorum nempe △ ABD + △ EFI est vt summa AE + EK ad summam AD + EI (4 l 5.) sed etiam altitudo △ LOR, ad altitudinem segmentorũ, nempe △

ABD+△EFI. eſt vt AE+EK. ad AD+EI. ex hy potheſi. Ergo altitudo △LOR æqualis eſt ſũmæ altitudinum △MAE+△NEK cum eidẽ eandem habeant rationem (2. l 5.) Ergo △LOR. minimum erit ſummæ triangulorum MAE+NEK (21. p) Ergo cũ △MAE. minimũ ſit □ ABCD & △NEK minimum ○EFH. erit △LOR. minimum ſummæ Polygonorum □ ABCD+○EFH (22 p.) Quod erat, &c.

Econuerſo. Si △LOR. minimum ſit ſummæ □ABCD+○EFH. etiam erit minimum triãgulis NEK. MAE (22 p.) Ergo altitudo △LOR æqualis eſt altitudinum ſummæ △MAE+△NEK (21. p.) ſed ſumma altitudinum △MAE+△NEK ad ſummã △ABD+△EFI eſt vt AE+EK ad AD+EI. vt antea: Ergo altitudo △LOR. ad ſummam altitudinum △ABD+△EFI eſt vt ſumma AE+EK. ad ſummam AD+EI. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXIV.

SI Triangulum habeat æqualem altitudinem cum terminis parallelarum, quæ determinant Polygonorum rationes, erit ſumma Polygonorum minimum, & econtra

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt △LOR. Polygona ſint □ ABCD, & ○EFH

altæ-

altitudo △LOR. æqualis sit summæ altitudinum punctorum E. & K. vbi determinantur Polygonorum rationes ex 17. p. vel sint RK. LB parallelæ. Dico △LOR. minimum esse sumæ ▱ABCD+ ⬠EFH *& ècontra.*

DEMONSTRATIO.

DVcantur quælibet KN.EM.& △LOR. minimum erit summæ △MAE+△NEK(21. p.) sed △MAE minimum est ▱ ABCD. & △ NEK ipsi ⬠EFH (18 p) Ergo △LOR minimum erit summæ ▱ ABCD+ ⬠ EFH (22.p.) Quod erat,&c.

Econuerso. Si ipsis minimum sit etiam ti ãguli MAE.NEK. minimum erit (22. p.) Ergo & ipsis æquè altum (21 p.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXV.

SI terminus parallela determinantis rectilinei rationem aliorum terminis æque altum sit, erit rectilineum aliorum summa minimum, & èconuerso.

EXPOSITIO. Fig 14.

SIt ▯ P & ex alia parte ▱ ABCD & ⬠EFH. & altitudo Q æqualis sit summæ altitudinum punctorum E & K. Dico ▯ P minimum esse summæ ▱ ABCD + ⬠EFH & *èconuerso* si ipsis

minimum ſit: dico altitudinem Q. æqualem eſſe E. & K.

DEMONSTRATIO.

SIt △LOR. vt altitudines R. & Q. æquales ſint. Ergo etiã altitudo R. æqualis erit ſummæ altitudinum E. & K. ſed □P. minimum eſt △LOR (18. p.) & △LOR minimum ſummæ ▱ABCD+⬠EFH (24 p.) Ergo etiam □P erit minimum ſummæ ▱ABCD+⬠EFH (9 p.) Quod, &c.

SI veto □P minimum ipſis ſit, etiam minimũ erit △LOR & Q æquè altum ipſi R. nempè ſummæ E. & K. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVI.

SI determinationes rationum in alterutra rectilineorum ſumma habeant æqualem altitudinem: erunt rectilineorum ſumma inter ſe minima, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 14.

SIt ex vna parte ▱ABCD+⬠EFH. & ex alia ○X+▭Z. & ſumma altitudinum K. æqualis ſit ſummæ altitudinum S. Dico ſummam ▱ABCD+⬠EFH minimam eſſe ſummæ ○X+▭Z & ſi ſumma ſit ſummæ minima dico altitudines K. & S. eſſe æquales.

DE-

DEMONSTRATIO.

SIt △LOR. æque altum puncto K. Ergo etiã puncto S. æque altum erit: Ergo erit △LOR. minimum vtrique summæ (24. p.) Ergo etiã summa erit alteri minima (9. p.) Quod erat &c.

E conuerso si summa sit summæ minima eidem △LOR minima erit (9. p.) Ergo altitudo R æqualis erit, & K. & S (24. p.) Ergo etiã altitudo K. erit altitudini S. æqualis (3. p.) Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXVII.

IN rectilineis similibus, rationum altitudines, sunt eorum basibus, & altitudinibus proportionales. etiam si complexe sumantur

EXPOSITIO. Fig. 15.

SInt ▭ABH. & ▭KLR. similia, determinationes rationum sint D & N (17. p) & earum altitudines DF. & NP Dico DF. ad NP esse vt bases AB. ad KL. vel vt altitudines HG ad RQ. Et si ▭T. & ▭V & ▭X sint ipsis similia: etiam complexe summa DF+NP. ad altitudines rationum in T+V+X. esse vt summam basium AB+KL. ad summam basium T+V+X.

DEMONSTRATIO.

VT AB. ad BC. ita KL. ad LM (4 l. 6.) & BC ad

ad BD. vt LM. ad LN (17. p.) & BD. ad DF. vt LN. ad NP (2. l. 6.) Ergo ex æquo AB ad DF. vt KL ad NP (1 l. 5.) Ergo alternãdo vt baſis AB. ad KL ita altitudo DF ad NP (4. l. 5.) Similiter demonſtrabitur AB. ad KL. eſſe vt HG ad RQ ergo etiam vt HG. ad RQ ita DF ad NP. (1. l. 5.) Ergo etiam ſumma ad ſummam erit in eadem ratione (4. l. 5.) Quod fuerat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

FIguræ ſimiles ſi æqualem baſim, vel altitudinem habeant, minimæ ſunt inter ſe, & è conuerſo.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SVpra æquales baſes T. V. X. Z. ſint conſtituta ſimilia Parallelogrãma: vel ſint T. V. X. Z. æquales altitudines ſimilium trapeziorum. Dico figuras eſſe inter ſe minimas, vel *è contra* ſi ▭T. & ▭V. & ▭X. & ▭Z. ſimilia ſint, & minima, dico baſes, vel altitudines T. V. X. Z. eſſe æquales.

DEMONSTRATIO.

CVm figuræ ſupponantur ſimiles, erunt rationum altitudines, earum baſibus, vel altitudinibus proportionales (27. p.) ſed baſes, vel altitudines T. V. X. Z. ſupponuntur æqua-

les:

les: Ergo rationum altitudines erunt æquales (2.l. 5.) Ergo figuræ erunt inter ſe minimæ (20 p.)

Econtra ſi figuræ ſunt minimæ, etiam rationum altitudines (20.p.) Ergo etiam baſes, vel figurarum altitudines erunt æquales (27. p.) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

SI Figurarum ſimilium ſumma æqualem habeat ſummam baſium baſi alteri, vel baſium ſummæ; erit minima alteri figuræ ſimili, vel figurarum ſumma, & è contra. Idemque eſt de altitudine figurarum.

EXPOSITIO. Fig 15.

SVmma ▭T + ▭V + ▭X. & ▭Y + ▭Z. habeant æqualem baſium, vel altitudinum ſummam dico ſummam ſummæ eſſe minimam: & *è conuerſo.*

DEMONSTRATIO.

CVm figuræ ſimiles ſint: rationum altitudines etiam complexe erũt ſummæ baſium, vel altitudinum proportionales (27 p.) Ergo cum ſumma baſium T + V + X. ſupponatur æqualis ſummæ baſium Y + Z. rationes habebunt ſuarum altitudinum ſummam æqualẽ (1.l. 5.) Ergo ſumma figurarũ erit alteri ſummæ

mæ, minima (20. p) Similiter si basis Y. æqualis sit summæ T+V. erit □ Y. minimum □ T + □ V. &c.

Conuersa eadem ratione demonstratur, vt in præcedenti.

PROPOSITIO XXX.

FIgura minimis licet dissimilibus similes, si ipsis proportionales fuerint, vel habuerint bases, aut altitudines proportionales minimæ sunt inter se, & è contra. Quod etiam dicitur de summa ad summam.

EXPOSITIO. Fig 16.

SIt △ABC. minimum □BD & △PQS. simile △ABC. & □QR. simile □BD. si fuerint proportionales vt △ABC ad □BD. ita △PQR ad □QR vel vt basis AB. ad BD ita PQ. ad QR Idemque est de altitudinibus. Dico △PQS. & □QR esse minima inter se. & *econtra*.

DEMONSTRATIO.

CVm △ABC. ad □BD sit ex Hypothesi vt △PQS ad □QR erit etiam alternando △ABC. ad △PQS. vt □BD. ad □QR sed △ABC. ad △PQS est in duplicata ratione AB ad PQ & □BD ad □QR. est in duplicata ratione BD ad QR (4. l 6) Ergo ratio duplicata AB ad PQ est vt duplicata ratio BD ad QR.

(1.

(1. *l* 5) Ergo etiam ratio simplex AB. ad PQ. ita BD ad QR (1 *l*. 5) Similiter altitudines proportionales erũt. *& è contra* si altitudines proportionales sint, etiam bases figurarum similium erunt proportionales (4 *l* 6.)

Iam positis basibus proportionalibus in figuris similibus, etiam rationum altitudines proportionales erunt (27. *p*.) Ergo altitudo rationis △ ABC ad altitudinem rationis △ PQS ita altitudo rationis □ BD. ad altitudinem rationis □ QR. Ergo etiam alternando vt altitudo rationis △ ABC. ad altitudinem rationis □ BD ita altitudo rationis △ PQS. ad altitudinem rationis □ QR (4 *l* 5) sed cum △ ABC & □ BD sint minima, habent rationum altitudines æquales (20 *p*) Ergo etiã △ PQS. & □ QR habent altitudines rationum æquales (2 *l* 5) Ergo sunt minima (20 *p*.) Quod eadem ratione de summa ad summam concluditur: vt perspicuum est.

Econuerso Si △ ABC minimum sit □ BD, & similia minima sint △ PQS & □ QR erunt figuræ, & bases proportionales: cum enim sint minimæ △ ABC □ BD sunt rationum altitudines æquales (20 *p*) & etiam in △ PQS & □ QR Ergo altitudo rationis △ ABC ad altitudinem △ PQS est vt altitudo □ BD ad altitu-

dinem □ QR (2 *l* 5.) ſed rationum altitudines ſunt vt baſes (27 *p.*) Ergo vt Baſis AB ad PQ ita BD ad QR (1 *l* 5.) Ergo etiam figuræ ſunt proportionales (4. *l* 6) & alternando. baſes, & figuræ proportionales erunt (4 *l* 5) Quod erat demonſtrandum.

CAPVT II.

DE CENTRO MINIMO

Entrum minimum, *dicitur punctum, ex quo prodeunt rectæ ad qualibet data puncta, vtcumque diſpoſita, ſupra quas figuræ conſtitutæ, licèt inter ſe diſſimiles, datis tamen ſimiles, minimam omnium ſimilium ſummam efficiunt*

Si Figuræ ſimiles eſſe debeant, dicetur Cẽtrum figurarum ſimiliũ *& compendij gratia* Centr. ff (ſ *Si figuræ diſſimiles fuerint, vocabitur* Centrum figurarum diſſimilium, *vel* Centr. ff. dd *Si autem demonſtratio figuris ſimilibus, & diſſimilibus communis fuerit dicetur abſolutè* Centrum figurarum, *vel* Centr. ff

Varie hoc figurarum centrum potest considerari, scilicet respectu eiusdem lineæ, vel plani, vel solidi hoc vltimum est absolutè cẽtrum minimum. Ex primo tamen secundum infero, & ex secundo tertium, quod monitum velim, ne cui supponere videar id ipsum, quod probandum assumo.

PROPOSITIO XXXI

SI recta coniungens duo puncta sit diuisa vnico punctoin figuras minimas, & sumatur in ea quodlibet aliud punctum, figuræ ex assumpto ad data superant minimas; totidem similibus ex interſegmento.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SInt data puncta A. & B quæ coniungantur recta AB & hæc diuisa sit in E vt □EA & □EB minima sint: vel △EA & ○EB. & sumatur in AB. quodlibet punctum F. Dico □FA + □FB superare □EA + □EB in 2 □EF. vel △FA. + ○FB superare △EA + ○EB in vno △EF. & vno ○EF.

DEMONSTRATIO.

CVm △EA & ○EB sint minima, habebunt æqualia complementa (8 *p*) sed assumpto quouis puncto F, summa △FA + ○FB. superat figuras æqualium complemẽtorum △EA + ○

+ ▭EB. in vno △EF + ▭EF (6. *p*) Ergo △FA + ▭FB. ſuperant figuras minimas duabus ſimilibus ex interſegmento. Quod erat demonſtrandum.

Eademeſt demonſtratio ſi duæ, vel plures figuræ EA. minimæ ſint vni, vel pluribus EB.

PROPOSITIO XXXII.

Iſdem datis, ſi extra rectam in quolibet plano per illam tranſeunte ſumatur punctum aliud, figuræ ex aſſumpto ſuperant minimas totidem ſimilibus ex recta ab aſſumpto ad punctum minimarum ducta.

EXPOSITIO. Fig 17.

SIntdata puncta A B quæ iungãtur recta AB. & hæc diuiſa ſit in E. vt △EA. & ▭EB ſint inter ſe minima: Trãſeat per AB. quodvis planum AGB & in eo ſumatur quodlibet punctum G. Dico △GA + ▭GB. datis ſimilia ſuperare △EA + ▭EB duobus ſimilibus ex EG. nempè △EG + ▭EG. Idem quæ eſt de figuris ſimilibus inter ſe

DEMONSTRATIO.

SIt GF. perpendicularis ipſi AB. cum GA & GB. opponantur angulis rectis in F. erit △GA. æquale △FA + △FG & ▭GB. æquale ▭GF + ▭FB (4 *l* 6.) Ergo △GA + ▭GB. æquãtur

tur △FA+△FG+▭GE+▭FB. ſed △FA+▭FB æquantur △EA+▭EB+△EF+▭EF (31 *p*) Ergo △GA+▭GB æquatur △EA+▭EB & præterea △GF+△FE. tum ▭GF+▭FE. ſed △GF+△FE. æquantur △GE. tum ▭GF+▭FE æquantur ▭GE (4. *l* 6) cum GE. opponatur angulo recto F. Ergo △GA+▭GB æquãtur △EA+▭EB & præterea △GE+▭GE Ergo △GA+▭GB ſuperant figuras minimas, nempe △EA+▭EB. duabus ſimilibus ex EG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI recta coniungens duo puncta ſit diuiſa in figuras minimas: & inde in quouis plano per rectam deſcribatur circulus, vel abſolutè ſphæra quolibet radio. Figuræ ex quouis peripheriæ circularis, vel ſuperficiei ſphæricæ puncto ad data puncta, ſuperant figuras minimas, totidem ſimilibus ex radio factis & ſumma ſemper eſt eadem.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SInt puncta A B & recta AB diuiſa in figuras minimas, vt △EA. & ▭EB. minima ſint: & per AB tranſeat quodlibet planum A B G in quo ex E. deſcribatur circulus G H. vel abſolutè ex E. deſcribatur ſphæra G H Dico ex quolibet puncto G. circunferentiæ G H vel

ſu-

ſuperficies ſphæricæ figuras △GA. & ⌓GB. ſuperare minimas △EA. & ⌓EB. duabus ſimilibus ex radio EG.

DEMONSTRATIO.

ASſumpto quolibet punto G figuræ ex illo ſuperant minimas ex E. duabus ſimilibus ex recta ab aſſumpto G ad E (32 *p*) ſed quodlibet punctum G ſumatur in circunferentia, recta EG. erit radius: Ergo ex quouis circunferentiæ puncto figuræ ſuperabunt minimas duabus ſimilibus ex Radio, &c.

2 Deſcribatur ex E. ſphæra GH & aſſumpto in ſuperficie quouis puncto G. erit in eodẽ plano cum A.B nempe in plano A B G. in quo eſt tota AEB & GE (1. *l.* 11) Ergo △GA + ⌓GB. ſuperant △EA + ⌓EB duabus ſimilibus figuris ex EG (32 *p.*) nempe ex radio ſphæræ Quod erat, &c.

3 Summa ex G. ſemper eſt eadem: quia ſemper eſt æqualis minimæ ſummæ cum duabus ſimilibus figuris ex eodẽ radio, vel æquali. Ergo cum ſemper ijſdem æqualis ſit, ſemper erit æqualis, vel eadem. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

CEntrum absolutè minimum inter duo puncta, est quod dividit rectam puncta coniungentem in figuras minimas, quod vnicum est, & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SInt puncta A. B & recta AB diuisa in E. in figuras minimas △EA & ○EB dico E. esse centrum absolute minimum ad puncta A. B. & esse vnicum, *& econtra*.

DEMONSTRATIO.

SI extra E sumatur quodlibet punctum G. erit in superficie alicuius sphæræ ex cẽtro E. radio EG descriptæ. Ergo △GA + ○GB superant △EA + ○EB duobus similibus ex EG (33 *p.*) Ergo summa ex E est omnium minima, & E. centrum absolute minimum: & vnicum est, quia ex quolibet alio fit maior summa. Quod erat, &c.

Conuersa patet, quia si E non diuideret AB. in figuras minimas non esset centrum minimum contra hypothesim. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXV.

SI punctum diuidat rectam æqualiter, erit cē-trum ff. ff.

2 *Si inæqualiter, erit centrum* ff dd *nempè quadrati vnius partis, & rectanguli vtriusque.*

3 *Si sphæra, vel circulus describatur, summa semper erit eadem iuxta centri qualitatem.*

EXPOSITIO. Fig. 17.

SI CB. diuidatur æqualiter, vel CD. inæqualiter in E. dico E esse *centr. ff. ff.* ad C. & B. vel *centr. ff. dd.* nempe □ ED. & ▭ CED. &c.

DEMONSTRATIO.

CVm EC. E B. supponantur æquales, erunt minimæ quæcumque figuræ similes inter se (28 *p.*) Ergo erit E. *centr. ff. ff.* ad C. B (33 p.)

2 Quoniam rectangulum CED & quadratum E D. habent æqualem altitudinem ED sunt inter se minima (10 *p.*) Ergo erit E centrum minimum *ff. dd* quæ similes sint □ ED & ▭ CED (33 *p.*)

3 Si sphæra, vel circulus describatur ex quolibet puncto G. summa *ff. ff* GC GB semper erit eadem. tum etiam summa ▭ GC & □ GD semper eadem (34 *p.*) &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

SI recta coniungens duo puncta diuidatur in quaslibet partes æquales, prima diuisio erit centrum minimum, totidem ff ff. quarum una sit ex maiori parte, & reliqua ex minori: & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt recta KN, diuisa in sex partes vt KL. sit quinta pars ipsius LN. dico L esse *centrum* 6. *ff ff.* quarum sint 5. ex KL. & vna ex LN. *& è conuerso* si L. sit *centrum ff ff.* quarum 5. sint ex KL. & vna ex LN. dico KL. esse quinta m partem ipsius LN.

DEMONSTRATIO.

CVm recta KL. sit quinta pars ipsius LN. quinque bases figurarum ex KL. æquales erunt basi LN. Ergo summa quinque *ff ff.* ex KL. minima erit simili figuræ ex LN (29 *p.*) Ergo cũ recta KN. diuisa sit in L in figuras minimas erit L. *centr ff ff.* vel centrum minimũ (34 *p.*) Quod, &c.

E conuerso Si L. sit *centr. ff ff.* ad 5 KL & 1. LN erunt istæ minimæ Ergo KL. erit quinta pars ipsius LN (29. *p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXXVII.

SI recta contungens duo puncta diuidatur in quaslibet partes æquales, quodlibet diuisionis punctum erit centrum minimum totidem ff ff. ex vtraque parte, quot sunt partes in opposita, & è conuerso.

EXPOSITIO.

SInt data duo puncta K N & recta KN. diuisa in 6 partes æquales Si sumatur punctũ M. Dico esse *centrum* 6 *ff ff*. quarum quatuor sint ex KM. quia pars opposita MN continet 4 partes: & duæ ff sint ex MN. quia pars opposita KM continet duas partes *& è conuerso.*

DEMONSTRATIO.

CVm KM contineat duas sextas partes · si quater sumatur, erit summa basium æqualis 8 partibus, & cum MN contineat 4 partes sibis sumatur, erit summa basium æqualis 8. partibus: ergo cũ basium summæ sint æquales, erit summa 4 *ff ff*. KM. minima summæ 2. *ff ff* MN (29 *p*) Ergo cum KN. diuisa sit in figuras minimas, erit M *centr ff ff*. (34 *p*.) &c.

Conuersa liquet, & demonstrari poterit vt in præcedenti.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

SI in recta fuerint qualibet puncta, & uno puncto ita diuidatur, vt ſumma figurarum vnius partis minima ſit ad ſummam alterius partis, figuræ ex quolibet alio recta puncto ſuperabunt minimas totidem ſimilibus ex interſegmento, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt data recta A B & in ea ſint puncta A C. D B & punctum E diuidat illam, vt △EA + ▭EC. minima ſint cum □ ED + ▱EB ſi in recta aſſumatur quodlibet punctũ F. Dico ſummam *ff dd* nempe △FA + ▭FC + □ FD + ▱ FB ſuperare minimam ſummam ex E totidem figuris prædictarum ſimilibus ex EF.

DEMONSTRATIO.

CVm △EA + ▭ EC minima ſupponantur □ ED + ▱ EB erunt ſummæ æqualium complementorum (8 *p*) Ergo figuræ ex F ſuperabunt figuras ex E. totidem ſimilibus ex interſegmento EF (7. *p*.) Quod, &c.

Econtra ſi exceſſus talis fuerit, erunt figuræ ex E. æqualium complementorum (7 *p*) Ergo Minimæ (8 *p*.) Quod, &c.

PROPOSITIO XXXIX.

SI in recta fuerint qualibet puncta, & ita vno puncto diuidatur, vt summa ff summa sit minima: figura ex qualibet alio plani, vel solidi puncto superat minimam totidem figuris ex recta ab assumpto ad punctum minima summa: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt data recta AB & puncta A.C.D.B & punctum E diuidat rectam, vt summa △EA + ▭EC. minima sit summæ □ED + ⬠EB. Assumatur præterea extra rectã quodlibet plani, vel solidi punctum G. & iũgatur recta EG. Dico figuras datis similes ex G superare minimam summam ex E totidem similibus factis ex recta EG. *& è conuerso.*

DEMONSTRATIO.

DVctis GA. GB. erit idem planum AGB. (1. *l.* 11.) & cum in eo sit recta AB. etiam erunt in illo puncta A.C E D B ducatur igitur GF perpendicularis ipsi A B. Ergo cum F. sit in recta AB summa *ff* ex F superabit minimam ex E. totidem *ff*. EF. nempe △FA + ▭FC + □FD + ⬠FB. æqualia erunt △EA + ▭EC + □ED + ⬠EB & præterea 4 *ff* similibus ex EF (38 *p.*) Sed cum anguli ad F. sint recti △

GA

GA. æquatur △FA+△FG. & □GC. æquatur □FC+□FG. & □GD. æquatur □FD+□FG. & ○GB æquatur ○FB+○FG (4 *l* 6.) Ergo summa ex G nempe △GA+□GC+□GD+○GB. æquatur minimæ summæ ex E. + 4. *ff* similibus ex EF. & 4. ex FG. sed cum angulus GFE rectus sit 4 *ff* EF. & 4 *ff*. FG. æquantur 4. *ff* EG. earundem similibus (4 *l*. 6.) Ergo summa ex G. æquarur minimæ summæ ex E. + 4. *ff*. ex EG. Ergo superat minimam summam 4 *ff*. EG quæ datis similes sint, licet inter se dissimiles Quod erat demonstrandum.

Econuerso. Si ex quolibet puncto G. summa superet modo dicto summam ex E. ordine retrogrado demonstrabitur, punctum E. diuidere rectam AB in figuras minimas Præterea eadem est demonstratio, licet puncta plura fuerint in vna parte, quàm in alia.

PROPOSITIO XL.

SI in recta fuerint quælibet puncta; punctum diuidens illam in figuras minimas, erit centrum ff. absolutè minimum ad data puncta, & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt recta AB & puncta A C D B & E. diuidat illam in figuras minimas, vt in præcedenti.

Di-

Dico punctum E. esse *centrum ff.* absolutè minimum ad data puncta A.B.C.D. *& econtra.*

DEMONSTRATIO.

CVm E. diuidat AB. in figuras minimas, summa ex E minor est, quàm summa ex quolibet puncto F eiusdem rectæ (18 *p.*) & etiam minor, quàm ex quolibet pũcto G plani, vel solidi (39 *p.*) Ergo cum summa ex E. minor sit, quam ex quolibet alio excogitabili puncto, erit E centrum absolutè minimum. Quod, &c.

Conuersa liquet. Si enim summa ex E non esset omnium minima, non esset E. centtum minimum, quod est contra hypothesim: Ergo, &c. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLI.

SI in recta fuerint quælibet puncta, & ex centro ff. minimo sphæra describatur in solido, vel circulus in quouis plano per centrum ff transeunte: summa ex quolibet superficiei sphericæ, vel circunferentiæ circularis puncto, superabit minimam totidem ff. ex radio, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 17.

SIt E *centeum ff* ad A.C D B ex quo describatur in solido sphæra GH vel circulus in plano: dico summam ex quouis puncto G. vel

vel H. superficiei, vel circunferentiæ dictæ superare minimam ex E. totidem *ff* ex radio EG. *& è contra.*

DEMONSTRATIO.

RAdius EG est distantia cētri a quouis puncto circunferentiæ, vel superficiei sphæricæ sed ex quolibet puncto G assumpto plani, vel solidi summa superat minimam totidem *ff* distantiæ GE (39 *p*.) Ergo ex quolibet puncto circunferentiæ circularis in plano, vel superficiei sphæricæ in solido summa superat minimam totidem figuris ex radio EG. Quod erat demonstrandum.

2 Cum summa semper habeat eundem excessum eidem minimæ summæ, semper erit æqualis, vel eadem (3 *p*.)

3 *Et è conuerso* si ex quolibet puncto G. semper sit idem excessus, nēpe totidem *ff* EG. punctum E diuidet rectam AB in figuras minimas (39. *p*.) Ergo erit E *centrum ff* absolutè minimum, Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

SI qualibet puncta fuerint in recta punctum efficiens distantias, quæ ad vnam partem sunt, æquales illis, quæ ad aliam, est centrum ff ff. & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 18.

IN eadem recta NR. sint puncta N O. P. Q R. & punctum F. eam diuidat vt distantiæ FN, FO. FP æquales sint FQ FR, nempe summa summæ Dico F. esse *centrum ff ff* ad N O, P, Q, R *& econtra* si F. sit *centrum ff. ff* dico distantias F N FO FP æquales esse ipsis FQ FR.

DEMONSTRATIO.

CVm summa basium figurarum similium FN+FO+FP, supponatur æqualis summæ basium figurarum inter se, & prioribus similium FQ+FR erit vna summa alteri minima (29 *p*) Ergo punctum F. diuidit rectam N R. in figuras minimas similes inter se: Ergo erit punctum F. *centr ff ff* absolutè minimum ad N, O P, Q R (40. *p*.) Quod erat demonstrandum.

E conuerso. Si F sit *centrum ff ff* absolutè minimum diuidit rectam N R in minimas figuras similes inter se (40 *p*.) Ergo cum summa *ff. ff.* FN+FO+FP. minima sit summæ *ff ff.*

FQ

FQ + FR. erit ſumma baſium alteri ſummæ æqualis (29 *p*) Ergo F *centrum ff ſſ* efficit diſtantias vnius partis, nempe FN FO. FP. æquales diſtantijs alterius partis FQ FR. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIII.

SI per qualibet data puncta in eadem recta ducantur quæuis parallelæ, & alia per centrum ff tranſiens ſecet ipſas, idem erit centrum ff ad interſectiones, & econtra.

2 *Si fuerit centrum ff ſſ. ſectiones vtriuſque partis, æquales erunt, & è contra.*

3 *Idem eſt de parallelarum ſegmentis.*

EXPOSITIO. Figura 18.

IN recta NR ſint puncta N O P Q R per quæ tranſeant quæuis parallelæ NH. OI PK QL. RM & ſit F *centrum ff* ad N O P Q R & per F. tranſeat HFM. ſecans parallelas in H I K L M. Dico punctum F. eſſe *centrum ff.* (quæ prioribus ſimiles ſint, & inter ſe, vel ſimiles, vel diſſimiles iuxta cẽtri qualitatem) ad H I K L M. *& è contra* ſi F. ſit *centrum ff* ad H I K. L M. etiã eſſe centrum ad N O P Q R Et ſi F ſit *centrum ff ſſ* ad N O P Q R. dico ſectiones FH FI FK æquales eſſe ſectionibus FL. FM. *& è contra* ſi

FH FI FK æquales sint FL FM dico F. esse centrum *ff ff* ad NOPQR.

DEMONSTRATIO.

CVm NH OI PK QL. RM. sint parallelæ, secant N R & HM in eadem ratione (2 *l.* 6) Ergo summa basium FH + FI + FK. ad summam FL + FM. est vt summa FN + FO + FP. ad summã FQ + FR (4 *l.* 5.) sed cũ F. sit *centrũ ff.* ad N O. P. Q R est *summa ff* FN. FO FP. minima *summæ ff* FQ FR (40 *p*) Ergo etiam *summa ff* FH FI FK. minima erit *summæ ff* FL. FM (30. *p.*) Ergo F. est centrum minimum ad H. I. K. L. M.

Econtra si F. centrum sit ad H I K L M eadem ratione demonstrabitur, esse centrum ad N. O P. Q R quia NR secatur sicut HM.

2 Si F sit *cẽtrum ff ff* ad N O P. &c. etiam erit *centrum ff ff.* ad H I K &c. Ergo distantiæ FH. FI. FK. æquales erunt distantijs F L. F M' (42. *p.*)

Econtra si distantiæ FH FI FK. æquales sint FL. FM. erit F. *centrum ff ff* ad H. I K. L M (42 *p.*). Ergo etiam ad N O. P Q R. &c. Quod erat demonstrandum.

3 Idem demonstrabitur, & eadem ratione de parallelarum segmentis.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

SI fuerint in plano qualibet puncta vt cumque diſpoſita, & per eorum centrum minimum tranſeat quæuis recta, ad quam demittantur ex punctis perpendicula, idem erit centrum minimũ ad interſectiones.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt data puncta in plano A B. C D E & eorum centrum minimum F. per quod tranſeat recta H M cui perpendiculares ſint A H. B K. C I. D L. E M. Dico punctum F. eſſe centrũ minimum ad interſectiones H I K L M.

DEMONSTRATIO.

SVmatur in H M quodlibet punctum G. Figuræ G A. G B. G C. G D. G E. ſuperabunt minimas F A. F B. F C. F D. F E. aliter non eſſet F. centrum minimum: ſed cum anguli H I. K L M. ſint recti figuræ G A. G B. G C. G D. G E. æquantur G H. H A + G I. I C + G K. K B + G L. L D + G M. M E (4. *l.* 6.) & figuræ F A. F B. F C. F D. F E. æquantur F H. H A + H I. I C + F K. K B + F L. L D + F M. M E (4. *l.* 6.) Ergo ablatis communibus H A. I C. K B. L D. M E. remanebit *ſumma* G H. G I. G K. G L. G M. maior quam *ſumma* F H. F I. F K. F L. F M (4 *P*.) Ergo cum hoc de quolibet puncto G. extra F. demonſtretur,

tur, erit summa ex F. semper minor, & omniũ minima. Ergo cum F diuidat rectam H M. in figuras minimas, erit *centrũ ff* ad H.I.K L M. (40 *p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XLV.

SI fuerint in plano qualibet puncta, per quæ ducantur qualibet rectæ parallelæ, & alia per centrum ff vtcumque secet ipsas, idem etiam erit centrum ff ad rectæ sectiones.

2 *Si fuerit centrum ff ff summa segmentorum vtriusque partis æqualis erit, & econuerso.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt puncta in eodem pla A B C D E & eorũ centrum minimum F. & sint quæuis A H. B K C I D L. E M inter se paral elæ, transeat per F recta N R. secans vtcumque parallelas in N. O. P. Q R. Dico punctum F. esse centrum minimum ad sectiones rectæ N. O P. Q R

DEMONSTRATIO.

CVilibet paralelarum sit perpendicularis F H & erit omnibus perpẽdicularis (13 *P*) Ergo F erit centrum minimum ad sectiones H I. K L M (44 *p*) Ergo cum N R. transeat per *centrum ff* ad puncta rectæ H M. erit etiam F. centrum minimum ad sectiones N. O. P. Q R. rectæ N R (43 *p.*) Quod erat demonstrandum.

2 Si

2 Si F sit *centrum ff ff* ad A B C D E, etiã erit *centr. ff ff.* ad H I K L M (44 *p.*) Ergo etiã ad N O P Q R (43. *p.*) Ergo summa F N, F O. F P æqualis erit summæ segmentorum F Q. F R (42 *p*) Quod erat, &c.

E conuerso. Si F. faciat distantias F N F O F P, æquales ipsis F Q F R. erit F *centrum ff ff* ad N O P Q R (42 *p*) Ergo etiam erit *centr ff ff.* ad puncta H. I K L. M (43 *p*) Ergo cum H. I. K L M. sint puncta perpendicularium: etiam F. erit *centrum ff ff.* ad A B C D E (44 *p.*) Quia eiusdem naturæ sunt centra ex demonstratis. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLVI.

Datis quotcumque punctis in plano, si in eodem extra centrum ff sumatur quodlibet punctum, figuræ datis similes superant minimas totidem similibus exrecta à centro ff. ad assumptum & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt data puncta A B C D E & eorum centrum minimum F. vt sit minima summa △ F A + □ F B + □ F C + □ F D + ◇ F E & in eodem plano extra F. sumatur quodlibet punctum G. Dico figuras ex G. datis similes superare minimas totidem similibus ex F G nempe

ex-

excessum esse △FG+▱FG+▭FG+□FG+◇FG quæ prioribus similia sint.

DEMONSTRATIO.

PEr F & G. ducatur H M. vtrinque infinita, ad quam ex A. B. C D E demittantur perpendicula AH.BK CI. DL EM. & erit F. *centrum ff* datis similium ad H.I.K. L. M (44 *p.*) sed △GH ▭GI.▱GK □GL ◇GM. superant similes figuras FH. FI.FK.FL FM. totidem similibus ex FG(39 *p*) Ergo si vtrique parti addantur similes figuræ ex perpendicularibus AH CI BK DL.EM *summa ff* GH.HA+GI. IC+GK KB+GL. LD+GM ME superabit summam FH.HA+FI.IC+FK.KB+FL LD +FM ME totidem similibus figuris ex I G (4.*P.*)Sed cum anguli ad H.I.K.L M sint recti figuræ △GH+△HA æquatur △GA (4 *l* 6.) & similiter △FH+△HA æquantur △FA. & sic de reliquis Ergo *summa ff* ex G nempe △ GA+▱GB+▭GC+□GD+◇GE superant similes ex F. nempe △FA+▱FB &c totidem similibus ex FG nempe △FG+▱FG+ ▭FG+□FG+◇FG. Quod erat, &c.

E contrario si ex quolibet puncto G. extra F figuræ ex G. superent figuras ex F totidem *ff* rectæ FG erit F *centrum minimum ff* quia cũ summa ex illo sit qualibet alia minor, erit

cum-

omnium minima. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLVII.

SI fuerint in plano qualibet puncta vtcumque, & in eo ex centro ff. deſcribatur circulus: ſumma figurarum ex quolibet circunferentia puncto ſuperat minimam totidem figuris ſimilibus ex radio. & ſemper eadem: & è contra.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt in plano puncta A. B. C. D. E. & in illo eorum centrum F. ex quo deſcribatur quilibet circulus ZX. Dico ſummam ex quolibet puncto Z in circunferentia aſſumpto ſuperare minimam ex F. totidem figuris ex radio FZ. *& è conuerſo.*

DEMONSTRATIO.

CVm FZ. ſit diſtantia centri à circunferentia: ſumma ex Z. ſuperat ſummam ex F. totidem *ff.* ex FZ (46. *p*.) Ergo cum hoc de quolibet puncto demonſtretur, conſtat veritas Ergo cum ſumma ſemper habeat eundem exceſſum: ſemper erit æqualis, vel eadem (3. *P*.) Quod, &c.

Conuerſa patet vt in præcedenti.

PRO-

PROPOSITIO XLVIII.

DAtis quibuslibet punctis in plano, ſi extra illud ſupra, vel infra ſumatur quodcumque punctum: Figura ex aſſumpto ſuperant plani minimas totidem ff ſimilibus ex recta ab aſſumpto ad centrum ff. plani.

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt pũcta A B. C D. E. & figurarum ſpecies △A □B ▭C. ▱D. ◇E. *centrum ff* plani ſit F. & aſſumatur quodlibet punctum Z. ſupra planum eleuatum, vel depreſſum infra. Dico *ſummam ff.* datis ſimilium ex Z. ſuperare ſummam *ff* ex F. totidem figuris ſimilibus ex recta FZ. quæ à centro ad aſſumptum ducitur.

DEMONSTRATIO.

DEmittatur ZG. ipſi plano perpendicularis: & ex puncto ſectionis G ducantur in plano rectæ ad data puncta GA. GB. GC. GD DE quibus omnibus perpẽdicularis erit ZG. & omnes anguli ZGA. ZGC &c. erunt recti (23 *P.*) Ductis igitur ZA ZB ZC. ZD ZE. opponentur angulis rectis Ergo △ZA ſuperat △GA toto △GZ &▭ZC ſuperat ▭GC toto ▭GZ &c (4 *l.* 6.) Ergo *ſumma ff* ex Z ſuperat ſummam ex G. totidem *ff* ex GZ. Sed *ſumma*

ma ff. ex G superat minimam ex F totidem similibus ex recta FG (45 *p*) Ergo *summa ff* ex Z superat minimam ex F. totidem figuris ex recta GZ & totidem ex recta FG. sed Δ FG + Δ GZ æquantur Δ FZ quod angulo recto opponitur (4 *l.* 6) & sic de reliquis Ergo totidem *ff* FG + totidem *ff.* GZ æquãtur totidem FZ. Ergo summa ex puncto Z. superat minimam ex centro plani F. totidem *ff* rectæ FZ. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XLIX.

CEntrum in plano minimũ ad quæ cuius eiusdem plani puncta est absolute minimum

2 *Si ex eo describatur sphæra summa ex quolibet superficiei puncto superat minimam totidem ff similibus ex radio*

3 *Summa ff semper est eadem.*

EXPOSITIO. Fig. 18.

SInt data in plano puncta A B C D E & plani *centrum ff* F dico esse absolute cẽtrum minimum etiam solidi: & summam ex superficie sphærica semper æqualem

DEMONSTRATIO.

SI extra F sumatur quodlibet punctum G in plano summa ex F minor est (46 *p*) Si punctum Z extra planum sumatur etiam summa

ex F. minor eſt (48. *p.*) Ergo cum ſumma ex F. ſit qualibet alia minor, erit omnium abſolute minima: & F. centrum abſolute minimum, &c.

2 Si ex F. deſcribatur ſphæra, quodvis punctum ſuperficiei diſtat a centro F. toto radio FZ. ſed ex quolibet puncto extra centrum F. ſumma ſuperat minimam totidem figuris diſtantiæ (46 & 48. *p.*) Ergo ex quolibet puncto Z ſuperficiei ſphæricæ ſumma ſuperabit minimam totidem figuris radij FZ. Quod erat, &c.

3 Cum ſumma ſemper excedat minimã eodem exceſſu, nempe totidem *ff.* datarum ſimilibus, ſemper erit æqualis, vel eadẽ. Quod erat, &c.

PROPOSITIO L.

SI fuerint in plano qualibet puncta, ex quibus ducantur perpendiculares in ipſum planum, vel in aliud planum per centrum ff. tranſiens idem etiam erit centrum ff. ad perpendicularium ſectiones in ſecundo plano.

EXPOSITIO. Fig. 19.

IN plano X Z ſint quælibet puncta A B C. D E. quorum centrum minimum ſit F. Trãſeat per F. quodcumque planum R S. ſecans pri-

primum, & communis sectio sit P Q. Demittantur præterea rectæ A H. B I. C K D L. E M. plano R S perpendiculares, secantes ipsum in H I K L. M Dico punctum F. esse pariter *centrum ff* ad H I K L. M quæ similes sint datis in A. B C. D E.

DEMONSTRATIO.

DVcantur ex F rectæ F A. F B F C F D. F E tũ F H F I. F K F M F L. & in plano R S. sumatur extra F quodlibet punctum G. ex quo ducantur etiam rectæ ad omnia puncta: cum anguli F H A. F I B &c. tum G H A. G I B. &c recti sint (23. *P.*) △ F A æquatur △ F H + △ H A. & □ F C æquatur □ F K + □ K C. &c. (4 *l.* 6) Similiter △ G A æquatur △ G H + △ H A, &c (4 *l* 6.) Ergo summa *ff* G A. G B. G C G D. G E æquatur summa *ff* G H. H A + G I I B + G K K C + G L L D + G M M E. & summa *ff* F A F B F C F D. F E. æquatur summæ *ff*. F H H A + F I I B + F K. K C + F L L D + F M M E.

Sed siue punctum G sit in plano X Z siue extra, summa *ff* ex G superat summam *ff*. ex F. totidem figuris rectæ F G (46 vel 48 *p.*) Ergo figuræ G H. H A + G I. I B + G K. K C + G L L D + G M M D superant figuras F H. H A + F I I B + F K. K C + F L L D + F M. M E totidem figuris rectæ F G. Ergo ablatis vtrinque communi-

busff HA IB.KC.LD.ME figuræ GH.GI GK. GL.GM ſuperabunt FH FI FK FL FM. totidem *ff.* rectæ FG Ergo cum hoc de quolibet puncto G. demonſtretur, erunt figuræ ex F. omnium minimæ, & F, *centrum ff* ad ſectiones perpendiculorum H.I.K.L M. Quod erat &c.

Eadem eſt demonſtratio ſi perpendiculares primo plano ducantur.

PROPOSITIO LI.

SI fuerint in plano qualibet puncta, & per illa ducantur quæuis parallelæ ſecantes ipſum, & quodlibet aliud planum tranſiens per centrum ff. vtcumque idem etiam erit centrum ff ad parallelarum ſectiones in ſecundo plano

EXPOSITIO Fig 19.

SInt in plano XZ, puncta A B. C. D. E & eorum *centrum ff.* F per quod tranſeat planum TV. & per A B. C D E parallelæ ſecantes vtcumque vtrumque planum; dico F eſſe centrum ad ſectiones parallelarum in plano TV.

DEMONSTRATIO.

SI parallelæ ſint perpẽpiculares, vel plano XZ. vel plano TV conſtat veritas ex (50 *p*) Si neutro ſint perpendiculares: concipiatur per F planum RS parallelis perpendiculare: Ergo

erit

erit F centrum ad sectiones plani RS (50. *p.*) Ergo cum ex punctis H I K L M sint perpendicula parallela, & planum T V. sit per centrũ F erit F. *centruff.* ad sectiones plani TV (50 *p.*) Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO LII.

SI fuerint in solido qualibet puncta, & per centrum ff. transeat planum, ad quod ex datis ducantur perpendicula: idem erit centrum ff ad plani sectiones.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt puncta A B C D E in solido, & *centrum ff* F. per quod transeat planum RS cui sint perpendiculares AH BI. CK. DL. EM dico F. esse *centrum ff* ad plani sectiones H I K L M.

DEMONSTRATIO.

ASsumatur in plano R S quodlibet punctũ G. cum F sit centrum minimum ad puncta solidi A B C D E. ex hypothesi figuræ ex G superant *ff* ex F. aliquo excessu: aliter F. non esset centrum minimum sit ergo excessus □ Y cum anguli in H I K L M. sint recti, figuræ GA. GB &c æquantur *ff* GHA GIB &c Tum figuræ FA FB &c æquantur *ff* FHA. FIB &c (4 *l.* 6) Ergo *ff* GHA GIB &c. superant FHA. FIB &c toto □ Y. Ergo ablatis communibus

HA.

HA.IB,&c. figuræ GH.GI,&c. ſuperant ff FH. FI.&c toto □ Y. Ergo F. eſt *centrum ff.* ad H. I. &c. ſicuti in 50 *p.* Quod,&c.

PROPOSITIO LIII.

SI fuerint in ſolido qualibet puncta, per quæ ducantur qualibet parallela ſecantes planũ tranſiens per centrum ff vtcumque. idem erit cẽtrum ff ad plani ſectiones.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt A B C D E in ſolido *centrum ff* F. per quod tranſeat planum TV. & quæuis parallelæ AH BI &c. ſecent ipſum vtcumque Dico F. eſſe *centrum ff.* ad plani, & parallelarum ſectiones.

DEMONSTRATIO.

SI planum TV. ſit parallelis perpendiculare, conſtat veritas ex 52 *p.* ſi non fuerit. concipiatur planum RS. parallelis A H BI. &c. perpendiculare: Ergo erit F *centrum ff* ad ſectiones H I K L M (52 *p*) ergo cum planum TV. tranſeat per F *centrum ff* plani RS & ſecet parallelas, erit F *centrum ff* ad ſectiones plani TV (50 *p.*) Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO LIV.

SI qualibet puncta fuerint in ſolido, & extra centrum ff ſumatur quodlibet aliud; figuræ ex aſſumpto ſuperant minimas totidem figuris rectæ ab aſſumpto ad centrum ff.

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt A.B.C.D.E. in ſolido, & F. *centr ff* extra quod ſumatur quodlibet punctum G. Dico figuras ex G. ſuperare minimas ex F. totidem ſimilibus rectæ FG.

DEMONSTRATIO.

PEr rectam F G. tranſeat planum RS. cui demittantur perpendicula AH BI. &c. & erit F. *centr ff.* ad H.I K L.M (52 *p*) Ergo *ff* GH. GI GK. GL GM. ſuperant *ff* FH. FI &c. totidem *ff* FG (46 *p*) Ergo additis vtrique parti *ff* HA IB KC.LD.EM. figuræ GHA GIB &c. ſuperabunt *ff*. FHA FIB &c. totidem *ff* FG. ſed figuræ GHA GIB &c. æquãtur *ff* GA GB. &c angulo recto oppoſitis & *ff* FHA FIB &c. æquantur *ff* FA, FB. &c. (4. *l* 6.) Ergo Figuræ ex G. ſuperant *ff*. ex F, totidem *ff* F G. Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LV.

SI fuerint in ſolido qualibet puncta, & ex cẽtro ff. deſcribatur ſphæra; vel in plano per centrumff tranſeunte circulus: ſumma ex quolibet ſuperficiei ſphericæ, vel circunferentiæ circularis puncto, ſuperabit minimam totidem ff radij, & ſemper erit eadem ſumma

EXPOSITIO. Fig. 19.

SInt puncta A B C.D.E in ſolido, & *centff.* F ex quo deſcripta ſit ſphæra, vel in plano R S. tranſeunte per F. ſit deſcriptus circulus radio F G dico ſummam ſemper eſſe eandem, & ſuperare minimam totidem*ff* radij FG

DEMONSTRATIO.

RAdius F G eſt diſtantia centri à quolibet puncto ſuperficiei ſphæricæ, vel circunferentiæ circularis: ſed ex quolibet puncto G. ſumma ſuperat minimã totidem*ff* diſtantiæ F G (54 *p.*) Ergo ſumma ex quolibet puncto ſuperficiei, vel circunferentiæ ſuperat minimam totidem*ff* radij FG. & ſemper eſt eadem, quia ſemper eidem eundem habet exceſſum (23.*P.*) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LVI.

SI fuerint in plano, vel in solido qualibet puncta, & ex centro ff. ducatur perpendicularis cuilibet rectæ, vel plano summa ex puncto sectionis minor erit qualibet alia totidem ff. distantia. Et sectio erit centrum ff. in rectâ, vel plano ad data puncta.

EXPOSITIO Fig. 20.

SIt B. *centr. ff.* ad quælibet puncta plani, vel solidi: ex quo ducatur B C. perpendicularis cuilibet rectæ DF. vel plano KL. dico C. esse *centr. ff.* in recta DF. vel in plano KL & summam ex C minorem esse quam ex F. totidem *ff* CF.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff* ex quouis puncto F. superat minimam ex B totidem *ff* BF & summa ex C eãdem superat totidẽ *ff* BC (46 vel 54 *p.*) sed cũ angulus C. rectus sit in rectâ, vel plano, figuræ BF. superant *ff* BC totidem *ff* CF (4 *l* 6.) Ergo summa ex F. superat summam ex C totidem *ff* CF. Ergo cum summa ex C. semper sit minor, erit C centrum *ff* in rectâ DC. vel in plano KL. Quod erat, &c.

PROPOSITIO LVII.

IIsdem positis, si ex penpendiculi sectione describatur circulus in plano: summa ex quouis circumferentiæ puncto, superabit plani minimam totidem ff radij: & absolute minimam totidem ff ex latere coni recti, cuius vertex sit centrum minimum. & summa semper erit eadem.

EXPOSITIO. Fig. 20.

POsitis quæ in 56 *p* sit ex C descriptus circulus DEF. Dico summam ex quouis puncto D superare plani minimam ex C. totidem *ff*. CD. vel minimam absolutè ex B. totidem *ff*. lateris DB. coni recti DEFGB.

DEMONSTRATIO.

RAdius CD est distantia centri C. à quolibet circũferẽriæ puncto: Ergo summa ex quouis puncto D. vel E &c. superat summam ex C. totidem *ff* radij DC (56 *p*.)

Similiter latus BD. est distantia verticis *B* à quolibet puncto basis DEFG. coni recti: Ergo summa ex quouis puncto D. vel E superat omnium minimam ex B. totidem *ff* lateris BD (46 vel 54 *p*.) Ergo semper erit eadẽ (3. *P*.) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LVIII.

SI per centrum ff. ad qualibet plani, vel ſolidi puncta tranſeat axis, licet continuata ſphæra, ſpheroides, Cilindri, Coni, vel Conoidis Hyperbolici, aut Parabolici, & in iſtis ſumatur qualibet circulus, cuius centro ſit axis perpendicularis. ex quolibet circunferentia puncto ſumma ff. erit ſemper eandem.

EXPOSITIO. Fig 20.

SIt B *centrum ff* ad quælibet puncta: & BC. axis prædicta DEFG circulus dictus, cuius plano ſit BC perpendicularis in centro C Dico ſummam ex circunferentia ſemper eſſe eadem.

DEMONSTRATIO.

SIue circulus DEFG ſit in ſphæra vbicunque conſtituta, ſiue in ſphæroide, &c. cum ſit axi BC. perpendicularis in centro, poterit eſſe baſis coni recti, cuius vertex ſit *centrum ff* B. Ergo ex quolibet circunferentiæ puncto, ſemper erit eadem ſumma *ff* (57. *p*) Quod erat, &c

Summa tamen circuli DGF maior erit, quam ſumma circuli PRS.

PROPOSITIO LIX.

SI recta licèt continuata per duo centra ff sit cuilibet plano perpendicularis : descripto ex intersectione quolibet circulo summa ff ad puncta unius centri ex quouis circunferentia puncto, semper erit in eadem ratione ad summam ff. alterius centri.

EXPOSITIO. Fig 20.

SIt B *centrum ff.* ad quælibet plani, vel solidi puncta: & X centrum ad quælibet alia puncta: & recta BX secet perpendiculariter quodlibet planum KL in C. descripto ex C quouis circulo DEFG dico summam ex circunferẽtia ad puncta centri B semper habere eandem rationem ad summam ex eadem circunferentia ad puncta centri X.

DEMONSTRATIO.

SVmma ex quolibet puncto G. ad puncta cẽtri B semper est eadem (57 *p*) & semper eadem ad puncta centri X (57 *p.*) Ergo summa ad summam semper est in eadẽ ratione (2 *l.* 5) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LX.

SI extra centrum ff ad qualibet puncta eiuſdem rectæ, plani, vel ſolidi ſumatur quodlibet punctum ſummæ ff excedit minimam totidem ff diſtantiis inter aſſumptum, & centrum ff abſolutè minimum; vel rectæ tantum, aut plani.

2 *Centrum ff ad qualibet puncta rectæ, plani, vel ſolidi vnicum eſt ſiue centrum ff ſit rectæ tantum, ſiue plani, ſiue abſolutè minimum.*

3 *Si ex centro ff abſolutè minimo ad qualibet rectæ, plani, vel ſolidi puncta deſcribatur ſphæra, vel ex centro ff plani circulus, ſumma ex quouis ſuperficiei ſphæricæ, vel circumferentiæ circularis puncto excedit minimam ex centro ff totidem ff. radij, & ſemper eſt æqualis, vel eadem.*

DEMONSTRATIO.

PRimum conſtat ex 32. 39. 46. 48. 54. 56 *p* quas omnes complectitur hæc propoſitio.

Secundum ex primo infertur. Quoniam ſi ex quocumque alio puncto ſumma eſt maior totidem ff diſtantiæ. ex nullo alio puncto colligi poterit ſumma minima: ergo nullum aliud punctum poterit eſſe *centrum ff* reſpectu rectæ, plani, vel ſolidi: Ergo *centrum ff* quomodocumque accipiatur, vnicum eſt.

Tertium continetur in 33 41 47 49 55. 57 *p.* quas

quas omnes complectitur hæc propositio: Ergo constat omnium veritas. Quod erat, &c.

Secunda propositionis pars necessaria fuit, reliqua in unam collecta sunt, ne pro centri ff. vel punctorum diuersitate singula propositiones in operis decursu passim adducendæ sint.

PROPOSITIO LXI.

SI in plano, vel in solido fuerint qualibet puncta, & à centro ff. ducatur recta ad aliud nouum punctum, in ea erit centrum ff. ad omnia, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig 21.

SInt data puncta A. B. C D. in plano, vel in solido vtcumque, & *cẽtrum ff.* ad illa sit F Præterea datum sit nouum aliud punctum E. vel in eodem plano, vel in solido: Ducta FE dico *centrum ff.* ad omnia puncta A. B C. D. E. esse in recta FE. *Et è conuerso* si E. sit centrum ad A. B. C. D E & L sit centrum ad A B. C. D E. dico rectam FL transire per E. vel rectam EL. transire per F

DEMONSTRATIO.

SVmatur extra rectam F E. quodlibet punctum H. & ducatur F H. & hoc radio describatur sphæra secans F E in L & ducatur EH. Cum puncta H L. sint in superficie sphæræ

CX

ex centro *ff.* F. deſcriptæ, ſumma *ff.* □HA+△HB+□HC+□HD. æqualis eſt ſummæ *ff.* □LA+△LB+□LC+□LD (55. *p*) ſed ◇EH. maius eſt quàm ◇EL. quia in triangulo FHE. latera FH. HE. maiora ſunt quàm FE (5. *l.* 1.) & ablatis æqualibus radijs FH. FL. remanet HE. maior quam LE. Ergo ſumma *ff* HA HB HC. HD HE. maior eſt ſumma *ff* LA LB LC. LD. LE. Ergo cum hoc demonſtretur de quolibet puncto H extra rectam FL. aſſumpto; punctũ minimæ ſummæ, vel *centrum ff* nequit eſſe extra rectam FE & ſic erit in illa. Quod erat demonſtrandum

E converſo ſi F ſit centrum ad A. B. C. D & L. ſit centrum ad A. B C D E recta FL. tranſibit per E. vel recta EL. tranſibit per F. quia cum recta F E. demonſtrata ſit eadem cum F L. vel cum E L. neceſſario FL vel EL tranſeunt per E & L. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXII.

SI ex cognito centro ff. ad alia puncta plani, vel solidi, rectæ in aliud ductæ ita diuidatur vt totidem figuræ iam positis similes ex parte centro proximæ, sint minimæ ad nouam addendam ex alia parte. illud erit centrum ff. & econtra.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SInt data puncta A. B. C. D & sit F *centrum ff.* datis □. △. ▭ ⬠ similium collocandæ est in nouo puncto E figura ◇. Si FE ita diuidatur in L vt quatuor figuræ FL. datis similes (quia F est cẽtrum quatuor punctorum A. B C D) minimæ sint ad nouam LE. sed ita vt □LF+△LF+▭LF+⬠LE. minimæ figuræ sint ◇LE. Dico L fore *centrum ff* ad omnia puncta A. B C. D. E. & sic de quibuslibet alijs, siue figuræ datæ similes inter se sint, siue dissimiles.

Econuerso si F. sit *centrum ff.* ad A B C D & L. ad A B. C D E. Dico rectam FE diuisam esse in L vt 4 *ff* FL datis in A B C D similes, minimæ sint cum vltima figura LE.

DEMONSTRATIO

CVm F. supponatur *centrum ff* cognitum ad puncta A. B C D. E & sit E. nouum punctum, ducta FE in illa erit *centrum ff* ad A. B C. D. E (61 *p*) sed assumpto in FE. quodlibet

alio

alio puncto extra L. summa *ff.* □RA + △RB + □RC + ⬠RD æquatur minimæ ex F. nempe *ff* FA. FB. FC. FD. + 4 *ff* FR (60. *p.*) Ergo summa ex R ad A. B. C. D. E. æquatur minimæ ex F. + 4. *ff* FR + ◇LE. sed eadem ratione *ff.* ex L. æquantur minimæ summæ ex F + 4 *ff* FL + ◇FE. Ergo cum 4 *ff* FL + ◇LE. supponantur minimæ, hoc est, minores quibuslibet alijs 4 *ff* FR + ◇RE. erit summa ex L. minor qualibet alia ex quolibet puncto R. Ergo erit L. *centrum ff* vel *centrum minimum* ad omnia puncta A. B. C. D. E. iuxta species figurarum datas. Quod erat, &c.

Eadem omninò est demonstratio, siue *centrum ff.* prius cognitum sit ad duo, tria, vel plura quælibet puncta, dum prædicta diuisionis ratio obseruata sit.

Econuerso si F. sit *centrum ff* ad A. B. C. D. & L. ad A. B. C. D. E. summa *ff.* ex L. minor erit qualibet alia ex quouis puncto R. sed summa ex L. æquatur minimæ ex F + 4 *ff.* FL + ◇LE. (60. *p.*) & summa ex R. similiter æquatur minimæ ex F + 4 *ff* FR + ◇RE. Ergo ablata vtrinque minima summa *ff* ex F ad A. B. C. D. remanebunt 4 *ff* FL + ◇FE minores quam 4 *ff* FR + ◇RE. Et cum hoc semper demonstretur de quolibet puncto R. extra L. erunt 4 *ff* FL + ◇

FE omnium minimæ. Ergo *centrum ff.* L. ad A.B.C D.E diuidit rectam F E in figuras minimas Quod erat,&c.

SCHOLIVM.

HOc theorema fusius explicandum fuit, quia *centri ff* inventio tota in eo consistit, obseruatis figurarum speciebus iuxta qualitatem quæstionis Theorematis etiam conuersio insignem habet in Geometria vsum, quod Auspice Deo in secunda huius operis parte manifestum omnibus fiet.

PROPOSITIO LXIII.

REcta coniungens duo centra ff ad alia, & alia plani, vel solidi puncta transit per centrum ff. ad omnia simul, & è conuerso.

EXPOSITIO Fig. 21.

SIt punctum F. *centrum ff* ad A B C D siue in plano, siue in solido sint, & E. *centrum ff.* ad G.N vel ad plura eiusdem, vel alterius plani, vel solidi & recta FE coniungat vtrumque *centrum ff.* Dico *centrum ff* ad omnia simul A.B C.D G N.&c. esse in recta F E vel illam transire per *centrum ff* Et *è conuerso*: Si F. sit centrum ad A. B. C D & R. ad A. B C D. G N & ducatur recta FR Dico transire per E. *centrum ff* punctorum G.N. & si ducatur E R.

tran-

transire per F. *centrum ff* punctorum A. B C. D.

DEMONSTRATIO.

SVmatur extra EF. quodlibet punctum H. & ducãtur FH. HE. & radio FH. describatur sphæra secans FE. in L. In triangulo FHE. sunt FH. HE. maiores, quàm FE (5. *l.* 1.) & ablatis æqualibus radijs FH. FL. remanebit EH. maior quàm EL.

Summa *ff* ex H. ad A. B. C. D. æquatur minimæ ex F + 4 *ff*. FH (60. *p*) & summa ex H. ad G N. æquatur minimæ ex E + 2 *ff* HE (60. *p*) Ergo summa *ff*. ex H ad A B. C D G N æquatur minimis ex F & E + 4 *ff*. FH + 2 *ff* HE. Similiter summa *ff* ex L. ad A B. C. D G. N. est æqualis minimis ex F & E + 4 *ff* FL. vel FH. + 2 *ff* LE Ergo cùm reliqua omnia sint æqualia, & 2 *ff* HE maiores sint quàm 2 *ff* L E quia basis HE. demonstrata est maior, erit summa ex H. maior quàm summa ex L. Ergo nullum punctum H extra rectam F E potest esse *centrum ff* ad omnia puncta A B. C. D. G. N. Ergo *centrum ff*. ad omnia est in recta FE. Quod erat, &c.

E converso si recta FE. transit per omnium *centrum ff* R. recta FR. transibit per E. vel ER. per F. quia FR. ER. EF. eadem recta sunt Quod, &c.

PROPOSITIO LXIV.

SI recta coniungens duo centra ff. ad alia, & alia eiusdem, vel diuersi plani, vel solidi puncta, sta diuisa sit vt totidem figura vnius partis, quot sua puncta, minimæ sint totidem figuris alterius partis, quot sua puncta: diuisionis punctum erit centrum ff. ad omnia simul, & è conuerso.

EXPOSITIO. Fig. 21.

SIt punctum F. *centrum ff.* ad A B.C.D. in plano, vel in solido. & E *centrum ff* ad G.N &c. recta F E coniungens *centra ff* F.E diuisa sit in R vt quatuor figuræ FR similes datis □ A. △B. ▱C. ⬠D minimæ sint duabus figuris R E. datarum similibus ▱G ⬠N Iuxta punctorũ cuius ibet cẽtri numerum, & figurarum speciem. Dico R. esse *centrum ff.* ad omnia puncta simul A.B C.D G.N. *Et è conuerso* si R. sit *centrum ff* ad A B C.D G.N & F ad A.B C D & E ad G N Dico FF. diuisam esse in R. vt 4 *ff* FR. minimæ sint ad 2 *ff* RE.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff* ex R ad A.B.C D æquatur minimæ ex F + 4 *ff* FR. & summa *ff.* ex R ad G.N. æquatur minimæ ex E + 2 *ff* RE (60. *p*) Ergo summa *ff* ex R ad A.B.C.D G N æquatur minimis ex F. & E. + 4 *ff* FR + 2 *ff.* R E. Similiter con-

conuincitur ſummam ex quolibet alio puncto L. rectæ F E. æquari minimis ex F & E + 4*ff* FL + 2*ff* LE Ergo cum minimæ ſummæ ex F. & E. communes ſint, & 4*ff* FR + 2 *ff* RE. minores ſint ex Hypotheſi quã quælibet aliæ 4*ff* FL + 2 *ff*. L E. ſumma ex R. erit omnium minima, quæ ex quolibet puncto rectæ F E. colligi poteſt: Ergo cum *centrum ff* ſit in recta FE (63.*p*.) erit R. *centrum ff* abſolutè minimũ ad omnia puncta A. B. C. D. G. N. Quod erat demonſtrandum.

E conuerſo ſi R. ſit *centrum ff*. ad omnia puncta ordine retrogrado conuincitur 4 *ff* FR + 2. RE. minores eſſe quibuslibet 4*ff*. F L + 2 *ff*. LE. prout in 62.*p*. Quod erat, &c.

CAP.

CAPVT III.

PROBLEMA CATHOLICVM RESOLVITVR.

Omnia, quæ in primo, & ſecundo capite tradita ſunt ad Problema Catholicum diriguntur, cui facilem ſternet viam aliorum Problematũ reſolutio ex præcedentibus orta, ac eodem ferè ordine demonſtrata.

Theorematum vernantes flores, haud ſterilem prædicunt annonam, qui omnes, ni frigoris, vel æſtus inſolentia tabeſcant, in decoctos autumnabunt problematum fructus Præcoces alij, quos in hoc capite colligemus, alij verò Serotini diutius calore Solis decoquendi in ſecundam operis partem colligendi venient: quorum ſapor, eo forte gratior, & iucundior erit, quo minus eminimo Geometriæ fundo, vel ſperari potuit, vel ſaltem debuit.

PRO-

PROPOSITIO LXV.
Problema 1.

DAto quolibet Triangulo, vel parallelogrammo aliud ipſi minimum, & alteri dato ſimile inuenire, vel inter parallelas conſtituere.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt datum Triangulum ABC. inueniendum eſt BED. quod ipſi minimum ſit, vel inter eaſdem parallelas, ſimile tamen HIK.

Conſtructio 1. Continuetur baſis ABE infinita, & fiat CD. ipſi parallela infinita, & angulus EBD æqualis H. & BDE æqualis HKI Dico factum.

DEMONSTRATIO.

TRiangulum enim BDE. eſt ex conſtructione inter parallelas cum ABC. Ergo ſunt triãgula æque alta (8 *l* 1.) Ergo ABC. BDE ſũt minima (10 *p*.) ſed cum anguli B & D æquales ſint H & K reliquus E æqualis eſt I (3 *l* 1) Ergo BDE HIK. cum ſint æquiangula, habent latera proportionalia, & ſunt ſimilia (2 *l* 6) &c.

Conſtruct 2. Si datum ſit parallelogrammum AF. & BG. ſimile debeat eſſe HL ducatur diagonium KI & fiat Triangulum BDE. ſimile HKI. vt antea, & ſit EG parallela BD.

crit-

eritque parallelogrammum BG. minimum ipſi AF. quia ſunt æque alta (10. *p*) & BG. ſimile HL. quia B D E. ſimile eſt HKI & DGE ipſi KIL. vt antea. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVI.

Problema 2.

SVpra datam rectam duo triangula conſtituere, quæ minima ſint, vel inter parallelas, & duobus datis ſimilia.

EXPOSITIO. Fig. 22.

SIt data recta MO. & data triangula ABC, HIK. & ſupra MO. conſtituenda triangula MPN. NRO. quæ minima ſint, vel inter parallelas, & ſimilia datis ABC. HIK.

Conſtruct. Fiat BDE ſimile HIK & minimum ipſi ABC (65. *p.*) Diuidatur poſtea recta MO. in N. vt AE. in B (2. *p.* 3.) & fiat ſupra MN. triangulum MNP. ſimile A B C & ſupra NO. triangulum NOR. ſimile B D E (3 *p.* 7.) Dico MPN NOR. eſſe minima, & inter ſe parallelas, & ſimilia datis.

DEMONSTRATIO.

CVm enim A. B C. B D E. ſint minima ex conſtructione, & MO. ſit diuiſa in ratione rectæ AE. triangula MNP. NOR. ſimilia ipſis ABC. BED. erunt etiam minima (30. *p.*) Ergo

MNP.

MNP NOR. erunt triangula æque alta, vel inter duas parallelas (10 *p.*) Deinde MNP. simile est ABC. & NOR. simile BED & BED. ipsi HIK. ex cõstructione: ergo NOR simile etiam est ipsi HIK (4 *l.* 6.) Quod, &c.

Si fuerint data duo parallelogramma AF. HL. fiat. BG. minimum ipsi AF. & simile HL. & diuisa MO in N. vt AE. in B. fiant MQ NS similia ipsis AF BG (3 *p.* 7) & erunt MQ NS. similia datis AF. BG. & minima inter se; quæ omnia demonstrantur vt antea.

PROPOSITIO LXVII.

Problema 3.

Datotriangulo, parallelogrammum efficere ipsi minimum, & alteri simile, vel e contra.

EXPOSITIO. Fig 23.

Sit datum triangulum ABC. & efficiendum parallelogrammum BF. ipsi minimum, & parallelogrammo IL. simile.

Construct. Ducatur CG perpendicularis basi AB. & diuisa CG. bifariam in H. ducatur HF. basi AB. parallela, & continuata AB. infinitè, fiat angulus EBD. æqualis KIM, donec BD. secet HF. in D. præterea ducto diagonio MK. fiat angulus BDE. æqualis IMK & duca-

tur EF. parallela BD. Dico parallelogrammum BF. esse minimum triangulo ABC. & simile dato IL.

DEMONSTRATIO.

CVm enim CG. sit altitudo Trianguli ABC. & HG. parallelogrammi BF. habet triangulum duplam parallelogrammi altitudinē ex constructione. Ergo △ABC. & ▭BF. sunt figuræ inter se minimæ (11 *p.*)

Deinde cum triangula BED EDF. sint in omnibus æqualia (7. *l* 1) sunt similia: tum etiam IKM. KLM. & BED. æquiangulum, & simile IMK ex constructione, est parallelogrammum BF. simile dato IL. & minimum triangulo ABC. Quod erat demonstrandum.

Construct. 2. Eadem ratione si datum sit Parallelogrammum BF. & constituendum triangulum ABC ipsi minimum, & simile dato NPQ. Continuata FDH ex quolibet puncto H demittatur perpendiculares HG & HC. sumatur æqualis HG & ducta CZ. basi BE. parallela, fiat angulus ABC. æqualis NPQ. & BCA æqualis NQP erit que N æqualis CAB. (3 *l* 1) & triangulum ABC æquiangulum & simile NPQ. & cum ABC habeat duplam parallelogrammi BF. altitudinem, erunt ABC

BF.

BF figuræ minimæ (11 *p.*) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXVIII.

Problema 4.

SVper datam rectam conſtituere triangulum, & parallelogrammum datis ſimilia, & inter ſe minima.

EXPOSITIO. Fig 23.

SIt data recta NO, ſupra quam conſtituenda ſunt triangulum NPQ. & parallelogrammum PS. ſimilia datis △ABC. & □IL. quæ ſint inter ſe minima.

Conſtruct. Fiat parallelogrammum BF. ſimile IL & minimum ipſi ABC (97 *p.*) & diuiſa NO in P. vt AE in B, (2 *p.* 3) Supra NP. fiat triangulum NPQ. ſimile ABC & ſupra PO. parallelogrammum PS. ſimile BF. vel IL. (3 *p.* 7.)

DEMONSTRATIO.

CVm NO & AE. ſint ſimiliter diuiſæ, & ABC BF ſint figuræ minimæ, erunt etiam △NPQ. & PS □ minima inter ſe (30 *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXIX.
Problema 5.

DAto quolibet rectilineo inuenire rationem ipſius ad triangulare ſegmentum, & efficere triangulum ipſi minimum alteri ſimile

EXPOSITIO. Fig. 24.

DAto rectilineo ABCDE. efficiendum eſt Triangulum BHI. ipſi minimum, & ſimile dato KLM.

Conſtruct. Ducãtur diagonia AD. AC &c. & continuato latere CD ſit EF. parallela diagonio AD & FG. parallela diagonio AC (quod continuandum eſt, donec omnibus diagonijs ducantur parallelæ ad continuata latera) & erit ratio BG. ad BC. vt Polygonum ABCDE. ad triangulare ſegmentum ABC (17.). Ducantur ergo GI parallela baſi ABH. & fiat angulus HBI æqualis K & BIH æqualis M Dico triangulum BHI. ex conſtructione ſimile KLM. eſſe minimum Polygono ABCDE.

DEMONSTRATIO.

DEmittatur enim perpendicularis IN & fiat CO parallela baſi AB Quoniam GI. CP O. BN ſunt parallelæ, eſt vt BG ad BC ita BI ad BP. & vt BI ad BP ita IN ad ON (2. *l.* 6.) Ergo IN ad ON eſt vt BG. ad BC (1. *l.* 5.) nempe vt

to-

totum Polygonum ABCDE. ad ſegmentum ABC. ſed IN eſt altitudo trianguli BIH. & ON altitudo triangularis ſegmenti ABC. Ergo altitudo trianguli BIH ad altitudinem ſegmenti ABC eſt vt totum Polygonũ ABCDE. ad triangulare ſegmentum ABC. Ergo Triãgulum BIH. minimum eſt Polygono ABCDE (12. *p.*) & ex conſtructione ſimile dato KLM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXX.

Problema 6.

DAto Triangulo efficere rectilineum ipſi minimum, & dato ſimile.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt datum Triangulum QRS & conſtituendum eſt rectilineum AGHIKM. ipſi minimum, & ſimile dato ABCDEF.

Conſtruct. Ductis diagonijs AE. AD. AC. inueniatur ratio rectilinei ABCDEF. ad triãgulare ſegmentum ABC. vt BN ad BC (69 *p*) & ſi baſes AB. QR. ſunt in eadem recta ducatur SO parallela baſibus AB. QR ſecans BN. in O. & fiat BO. ad BP vt BN ad BC (2. *p.* 7.) Si verò AB. QR non ſint in eadem recta: ducatur SY perpendicularis, & in recta AB continuata ſumatur quodlibet punctum X. & perpendi-

dicularis XZ æqualis YS. & ducatur ZO. parallela basi AB. & fiat vt antea vt BN. ad BC, ita BO ad BP.

Deinde ducatur PH. parallela basi AB. secans diagonium in H & fiant HG HI IK KM. lateribus parallelæ, & erit rectilineum AGHIKM. simile ex parallelismo ipsi ABCDEF. (3 *p.* 7.) Dico esse etiã minimũ triãgulo QRS.

DEMONSTRATIO.

PErpendiculum OT. est altitudo trianguli QRS & VT altitudo triangularis segmenti AGH. Est igitur TO ad TV. sicut BO ad BP. (2. *l* 6.) Sed in parallelogrãmo GP. sunt æquales GH BP (7 *l* 1.) Ergo TO. ad TV. est vt BO ad GH vel BN. ad BC. ex constructione, hoc est, vt rectilineum ABCDEF. ad segmentum ABC (17. *p*.) sed etiam vt rectilineũ ABCDEF. ad triangulum ABC ita rectilineum AGHIKM. ad triangulum AGH (4 *l* 6.) Ergo ratio BO ad BP. vel BH hoc est TO ad TV. est ratio rectilinei AGHIKM. ad triangulare segmentum AGH (1. *l* 5.) Ergo TO. altitudo Trianguli QRS. est ad altitudinem TV segmenti AGH vt totum rectilineum AGHIKM. ad triangulare segmentum ABG Ergo AGHIKLM & QRS sũt figuræ minimæ (12 *p*.) Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXI.
Problema 7.

SVpra datam rectam constituere triangulum, & rectilineum datis similia quæ inter se minima sint.

EXPOSITIO. Fig. 25.

SIt data recta *fg*. & rectilineum ABCDEF. & Triangulum QRS. diuidenda est recta *fg* in *y*. vt rectilineum supra *fy* & triangulum supra *yg*. similia datis sint minima.

Construct. Fiat triangulum simile dato QRS. & minimũ rectilineo ABCDEF. ex 5 *p.* vel rectilineum AGHIKM simile dato ABCDEF. & minimum triangulo QRS. ex 6 *p.* & diuidatur *fg* in *y* vt sit *fy* ad *yg* sicut AG ad QR (2 *p.* 3.) & supra *fy*. fiat rectilineum simile AGHIKM & supra *yg*. triangulum simile QRS. (3 *p.* 7.) Dico factum.

DEMONSTRATIO.

CVm enim AGHIKM. & QRS sint figuræ minimæ ex cõstructione & *fg* sit diuisa in ratione basium AG ad QR. erunt figuræ supra *fy*. *yg* minimæ (30 *p.*) Quod erat, &c.

PRO-

PROPOSITIO LXXII.
Problema 8.

DAtis quibuſcumque triangulis, vel parallelogrammis aliud efficere omnium ſummæ minimum, & dato ſimile.

2 *Supra datam rectam triangula, vel parallelogramma conſtituere datis ſimilia, quorum unum minimum ſit reliquorum ſumma.*

EXPOSITIO. Fig 26.

SInt data Triangula ABC. DEF HIK. quæritur PQS omnium ſummæ minimum, & ſimile dato MON.

Conſtruct 1. Ducantur ex verticibus perpendiculares AB DG. HL & aſſumpto in recta infinita PQ quolibet puncto P, ſit PR. ipſi perpendicularis, & æqualis ſummæ omnium perpendicularum AB+DG+HL, & ducatur RS infinita parallela PQ. Fiat deinde angulus QPS æqualis M & PSQ æqualis O eritque SQP æqualis N (3. *l.* 1) & triangulum PQS. æquiangulum, & ſimile MNO. eritque minimum datis ABC. DEF HIK.

DEMONSTRATIO.

QVoniam ex conſtructione habet PQS altitudinem PR æqualem ſummæ altitudinum AB DG. HL. eſt omnium ſummæ mi-

ni-

nimum (21 *p*.) Idemque eſt de Parallelogrammis. Quod erat demonſtrandum.

EXPOSITIO 2.

2 Sit data recta TZ. ſupra quam conſtituenda ſint quatuor triangula ſimilia datis ABC. DEF HIK MNO ita vt ſimile MNO. minimum ſit ad ſummam ſimilium ABC. DEF. HIK.

Conſtruct. 2. Fiat primo triangulũ PQS. ſimile MNO. quod ſit minimum reliq orum ſummæ ABC DEF. HIK vt antea. Deinde ſumatur baſium BC. EF IK PQ ſumma: & fiat vt ſumma baſium ad BC ita TZ ad TV & iterum vt ſumma baſium ad EF. ita TZ ad VX & iterum vt ſummæ baſium ad IK ita TZ ad XY. (2. *p* 7) Conſtituatur deinde ſupra TV triangulum ſimile ABC. & ſupra VX. triangulum ſimile DEF. & ſupra XY. triangulum ſimile HIK. & ſupra YZ ſimile PQS Dico triangulũ ſupra YZ. eſſe omnium ſummæ minimum.

DEMONSTRATIO.

Cum enim recta TZ ſit diuiſa ex conſtructione in ratione baſium BC. EF IK PQ. & △ PQ ſit minimum ad triangula BC. EF IK. erit △YZ minimũ triangulis TV. VX. XZ (30 *p*) Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LXXIII.
Problema 9.

CVilibet rectilineo aliud minimum efficere alteri dato ſimile

2 *Supra datam rectam duo rectilinea conſtituere minima, & datis ſimilia.*

EXPOSITIO. Fig. 27.

SIt datum rectilineum ABCDE cui minimum efficiendum eſt IVST. ſimile dato IKLM.

Conſtructio Ratio rectilinei ABCDE. ad ABE ſit AG ad AE. (17.*p*) & GH perpendicularis BAH Præterea ratio IKLM. ad IKL. ſit KN. ad KL. (17.*p*) & NO perpendicularis baſi IKO ſumatur OP. æqualis HG & fiat vt NK. ad KL. ita OP. ad OR (2.*p* 7) & RS. parallela IK ſecans diagonium in S. ductis ST SV &c. parallelis erit IVST ſimile IKLM (3.*p* 7.) Dico IVST minimum eſſe ipſi ABCDE.

DEMONSTRATIO.

REctilineum IKLM ad ſegmentum IKL eſt vt IVST ad IVS (4 *l.* 6) ſed IKLM. ad IKL. eſt vt KN. ad KL. hoc eſt vt PO ad OR. Ergo IVST ad IVS. eſt vt OP. ad OR ſed quodlibet triangulum nempe GHA habens altitudinẽ GH vel PO. eſt minimum ipſi ABCDE. quia

eius

eius altitudo GH ad altitudinem HQ ſegmẽti ABE. eſt vt ABCDE ad ABE & etiam eſt minimum rectilineo IVST. quia altitudo eius OP. ad altitudinem OR. ſegmenti IVS. eſt vt IVST ad IVS (12.*p*) Ergo etiam rectilinea ABED IVST. ſunt inter ſe minima (9.*p*) Quod fuerat demonſtrandum.

CONSTRVCT. 2. ET DEMONST.

2 Sint data rectilinea ABCD IVST. & recta XZ ſupra quam duo alia ipſis ſimilia collocanda ſunt, & inter ſe minima.

Fiat IVST. minimum ipſi ABCDE. & ſimile IKLM. vt antea deinde diuidatur XZ. in Y. vt XY. ad YZ. ſit vt AB ad IV. vel vt ſumma AB + IV. ad AB ita XZ ad XY (2 *p*.7) & fiat ſupra XY rectilineũ ſimile ABCD & ſupra YZ. aliud ſimile IVTS (3 *p*.7) & erunt inter ſe minima; quia XZ. diuiſa eſt in ratione baſium A B. I V. (30.*p*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXIV.
Problema 10.

DAtis quibuslibet rectilineis alia similia interſe minima efficere.

2 *Datam rectam diuidere in qualibet rectilinea minima datis ſimilia.*

EXPOSITIO. Fig. 21.

SInt data rectilinea A. B. C D.E efficienda ſunt alia ſimilia, vt omnia ſint interſe minima.

Conſtruct. 1. Fiat F. ſimile B. & minimum Triangulo A (70 *p.*) Item G. ſimile C. & minimum ipſi A. Item H ſimile D. & minimum eidem A. Item M ſimile E. & minimum eidē A. (70. *p.*) vel ſi A non ſit triangulum (73 *p.*) Dico A.F.G H.M eſſe minima interſe.

DEMONSTRATIO.

CVm enim omnia minima ſint ex conſtructione ipſi A. erunt interſe minima (9 *p.*) Quod erat, &c.

CONSTRVCT. 2. ET DEMONST.

2 Sit data recta XZ diuidenda in figuras minimas ſimiles A.B.C.D E Fiant minimæ A. F. G.H. M. vt antea, & poſtea fiat vt ſumma baſium A F G H M ad baſim A ita XZ ad XP. & ſupra XP. fiat rectilineum ſimile A. Deinde vt ſum-

ſumma baſium A. F. G. H. M. ad baſim F. ita XZ ad PQ & fiat ſupra PQ rectilineum ſimile F. (3 *p.* 7.) Quod continuabitur donec expleãtur rectilinea: eritque XZ diuiſa in ratione baſium figurarum minimarum: Ergo figuræ ſupra partes rectæ XZ conſtitutæ datis ſimiles erunt interſe minimæ (30 *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXV.

Problema 11.

DAtam rectam diuidere in quotcumq; figuras minimas ſimiles inter ſe.

2 *Datam rectam diuidere in duas partes, vt figura vnius minima ſit ad quotcumque ſimiles alterius partis.*

3 *Datam rectam diuidere in duas partes, vt quotcumque figura vnius minima ſint ad quotcumque ſimiles alterius.*

CONSTRVCT. ET DEMONST. Fig. 29.

SIt data recta AB. diuidatur in tot partes æquales, quot figuræ ſimiles deſiderantur: nempe bifariam in F. & erunt AF FB figuræ minimæ, vel trifariam in E. G & erunt AE EG. GB. minimæ, vel quadrifariam in I F. M &c. Semper enim figuræ ſimiles habebunt æqualem baſim, ex æquali diuiſione: Ergo erunt interſe minimæ (28 *p.*)

CONS-

CONSTRVCT. ET DEMONST. 2.

2 Sit diuidenda AB in duas partes vt figura vnius minima sit duabus alterius, vel tribus, &c. Diuidatur in tot partes æquales, quot sunt omnes figuræ, & primum punctum diuisionis est quæsitum: nempè si figura vnius minima esse debeat duabus alterius, quia sũt tres figuræ, diuidetur in tres partes AE. EG. GB. & figura EB. minima erit duabus AE. Si vna debeat esse minima quinque alijs diuidetur in 6. partes AD DE EF FG GH. HB. & figura DB. minima erit 5. AD. Ratio omnium est, quia semper maior pars est minoris multiplex. Ergo figura ex parte maiori, minima erit totidem figuris similibus ex minori, quoties hæc continetur in maiori, quia eius basis summæ basium est æqualis (29 ℘) Quod, &c.

CONSTRVCT. ET DEMONST. 3.

3 Sit AB. diuidenda vt quinque figuræ vnius partis minimæ sint ad septem alterius: vel in quacumque alia ratione. Diuidatur tota recta in tot partes æquales, quot sunt omnes figuræ, nempe in 12 & sumatur AK continens quinque partes, & KB septem. Dico 7. figuras ex AK. minimas esse 5 figuris ex KB. & sic de quacumque alia diuisione.

Ratio est, quia cum 5. AC. constituant AK

&

& 7. AC. constituant KB. communis mensura AC. continetur quinquies in AK. & septies in KB. Ergo 7. figuræ AK. & 5 *ff* KB continent æqualem basium summã. Ergo 7. AK minimæ erũt 5 figuris partis oppositæ KB (29 *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVI.

Problema 12.

Datis quibuscumque rectilineis aliud efficere alteri dato simile, quod minimum sit omnium antecedentium summæ.

EXPOSITIO. Fig 30.

SInt Rectilinea A B C D. G H I K L. O P Q. S T. V X. & efficiendum est *bdf* simile S T V X & reliquiquis omibus minimum.

Construct. Inueniãtur omnium rationes ad Triangularia segmenta (69 *p.*) & demissis perpendicularibus F E. M N. Q R Y Z. sumatur seorsum quælibet *bg* in finita, & fiat vt Y Z. ad summam perpendicularium F E + M N + Q R. ita basis S T. ad nouam basim *bd* (2 *p.* 7.) & supra *bd* fiat rectilineum *bfl* simile S V X (3 *p.* 7.) Dico rectilineum *bfl* minimum esse reliquorum summæ A B C D + G H I K L + O P Q.

DEMONSTRATIO.

FIat enim vt T V. ad T Y. ita *df* ad *dq*. & demis-

ta-

ratur *qg.* perpẽdicularis. Cum ex similitudine figurarum ſint anguli YTZ *qdg.* æquales anguli, & Zg recti erunt Y *g.* æquales (3 *l.* 1.) Ergo proportionales ſunt, vt ST. ad TV ita *bd.* ad *df* &c (2. *l* 6) & vt TV. ad TY ita *df* ad *dq* ex ex conſtructione, & vt TY. ad YZ. ita *dq.* ad *qg.* (2 *l.* 6.) Ergo vt compoſita ratio ST. ad YZ ita *bd* ad *qg.* (1. *l* 5) & alternando vt ST. ad *bd.* ita YZ. ad *qg.* ſed ST. ad *bd.* ex conſtructione eſt vt YZ. ad ſummam perpendiculorum FE + MN + QR. Ergo YZ. ad *qg.* eſt vt YZ ad ſummam perpendiculorum FE + MN + QR (1. *l* 5) Ergo *qg* æqualis eſt ſummæ FE + MN + QR (2. *l* 5) Ergo *bdfl.* minimum eſt ſummæ reliquorum ABCD + GHIKL + OPQ (25 *p*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXVII.
Problema 13.

Datis quotcumque rectilineis alia ſimilia efficere in eadem, vel in qualibet alia ratione, vt iſtorum ſumma minima ſit aliorum ſumma.

EXPOSITIO. Fig. 30.

SInt data rectilinea ABCD GHKL OPQ ST VX *bdfl* alia ſimilia datis STVX *bdfl.* efficienda ſunt in eadem baſium ratione, quorũ ſum-

ſumma minima ſit trium priorũ ſummæ AB CD+FGHKI+OPQ.

Conſtruct. Inueniantur rectilineorum rationes ad ſua triangularia ſegmenta (69 *p*) & demiſsis perpendicularibus FE MN QR tum YZ, *qg* ſit *mn* ſumma trium FE MN. QR. & ſit *rp* ſumma duarum YZ+*qg* nempe *rk* æqualis YZ. & *kp* ipſi *qg* diuidatur *mn* in *y* ſicut *rp* in k. (2 *p*. 3.) & fiat ſicut *rk* vel YZ. ad ST. ita *my*. ad *x* & iterũm ſicut *kp* vel *qg* ad *bd* ita *yn* ad *z*. (3 *p* 7.) Tandem ſupra *x* fiat rectilineum ſimile SIVX. & ſupra *z*. aliud ſimile *bdfl* Dico horum ſummam minimam eſſe ſummæ rectilineorum ABCD+GHIK+OPQ.

DEMONSTRATIO.

CVm enim ex conſtructione ſit *my* ad baſim *x* vt YZ. ad baſim ST. & *yn* ad baſim *z*. vt *qg*. ad baſim *bd*. erunt *my yn* altitudines figurarum *x*. *z*. ſimiles iſis YZ. *qg* (4 *l* 6.) ſed *mn* eſt ſumma altitudinum FE+MN+QR Ergo altitudines in figuris *x z*. æquantur altitudinibus in figuris ABCD FGHK. OPQ Ergo ſumma figurarum *x*. *z*. minima eſt ſummæ figurarum ABCD+GHK+OPQ (26. *p*) Quod erat demonſtr. &c.

Conſtruct. 2. Similiter ſi ratio data baſiũ homologarum ipſis ST. *bd*. ſit *a* ad *c* diuidatur

ſumma altitudinum *mn.* in *y.* vt *my* ad *yn.* ſit vt *a* ad *c.* & reliqua eodem modo perficientur vt antea. Quod ſpeciali demonſtratione non indiget. Si verò nulla ratio determinata ſit, poteſt libetè ſumi quodlibet punctum *y* in ſumma altitudinum *mn.* & ſemper figuræ ſupra inuentæ *x. z.* prioribus erunt minimæ. Vnde patet infinitas figuras datis STX. *bdl.* ſimiles inueniri poſſe, quarum ſumma ſit ſummæ trium antecedentium minima.

PROPOSITIO LXXVIII.
Problema 14.

DAtam rectam vno puncto diuidere vt rectilineum vnius partis dato ſimile minimum ſit ad ſummam duorum, trium, &c. alterius partis, aliis etiam datis ſimilium.

EXPOSITIO. Fig. 31.

SInt data rectilinea A B.C.D.E & recta LM. diuidenda eſt in N. vt rectilineũ ſupra NM. ſimile dato E. minimum ſit ad ſummam rectilineorum ſupra LN quæ ſimilia ſint datis A B.C D.

Conſtruct. Sumantur quatuor rectæ F G. H I æquales, quæcumque ſint & ſupra F. fiat rectilineum ſimile A. & ſupra G. ſimile B. & ſupra H. ſimile C. & ſupra I. ſimile D. &c. Inue-

ueniatur deinde rectilineum simile E quod sit minimum factorum summæ F.G H I(76.p.) & sit eius basis K. Fiat præterea vt summa basium F+K ad basim K. ita LM ad NM(2.p 7.) & supra L N. fiant quatuor rectilinea similia datis A B.C D.vel F.G H I.& supra NM aliud simile E vel K Dico rectilineum NM.esse minimum illorum quatuor summæ supra LN.

DEMONSTRATIO.

REcta enim LM. diuisa est in N. in ratione basium F. vel G. vel H. vel I quæ omnes æquales sunt,& K ex constructione: Ergo sicut K. minimum est ad summam F.G H.I ita NM.minimum erit ad summam 4 LN. factis F.G.H.I.similium,vel datis A. B.C.D. (30.p.) Quod erat,&c.

PROPOSITIO LXXIX.

Problema 15.

DAtam rectã vno puncto diuidere vt summa rectilineorum datis similium vnius partis, minima sit summa rectilineorum datis similium alterius partis, licet omnia sint inter se dissimilia.

EXPOSITIO. Fig. 32.

SInt data rectilinea A B.C D E F. & recta QR diuidenda in S. vt tria rectilinea supra

QS similia datis A B C. minima sint duobus, vel tribus, vel pluribus supra S R. quæ datis D.E.F.&c. similia sint.

Construct. Primo assumpta pro basi quacumque recta G. fiant supra ipsam, vel supra æquales G.H.I. rectilinea similia datis A. B. C. & supra eandem, vel alias quascumque inter se æquales K. L M. rectilinea datis D E.F. similia. Deinde fiant rectilinea N O P. similia factis K L M (77 *p*.) quæ minima sint factorum summæ G.H I & erunt bases N. O.P. æquales sicut K.L.M (13 *p*.)

Diuidatur præterea QR in S. vt QR ad QS. sit veluti summa basium G + N. ad G. & fiant supra QR. tria rectilinea similia G.H I. vel A B C. & supra S R. alia similia N O P. vel K L M. vel D E F. Dico summam rectilineorum Q S similium datis A. B C. minimam esse summæ rectilineorum S R. similium D E.F.

DEMONSTRATIO.

CVm enim QR. diuisa sit in S in ratione G. ad N & tres figuræ supra G similes A B C minimæ sint ex constructione tribus supra N. similibus D E F erit Q R diuisa in ratione basium figurarum minimarum: Ergo tres figuræ supra QS similes datis A.B.C. minimæ etiã erunt

erunt tribus supra SR. similibus D.E.F. (30.*p.*) Quod erat demonstrandum.

Eadem omninò est constructio, & demonstratio, licet in vna parte plures sint figuræ quã in alia, dum prius omnes vnius partis reducãtur ad eandem basim, & similiter alterius. Si in vna parte aliquot figuræ similes fuerint, instituitur operatio omninò, ac si essent dissimiles.

PROPOSITIO LXXX.

Problema 16.

Datis quibuslibet punctis in plano, vel in solido inuenire centrum figurarum similium

EXPOSITIO. Fig. 33.

SInt data puncta vtcumque disposita A B.C. D.E F inueniendum est centrum *ff ff* L. ex quo ductis rectis ad A.B.C.D.E.F. summa figurarum similium inter se sit omnium minima, minor scilicèt quàm summa ex quocumque alio puncto plani, vel solidi.

CONSTRVCT. ET DEMONST.

SI puncta data sint tantum duo A B. iungantur recta AB & erunt A. & B. in eadem recta AB. diuidatur hæc bifariam in G & erit G. cẽtrum *ff ff.* ad duo puncta A.B (35 *p.*)

Si

Si puncta fuerint tria A. B. C. ex centro G. duorum A. B. ducatur recta ad tertium punctum C. & diuidatur trifariam, vel ſumatur tertia ipſius pars GH. & erunt 2 *ff* GH. minimæ HC (37. *p*) Ergo H. eſt *centr ff ff.* ad A. B. C (62 *p*)

Si puncta fuerint quatuor A B. C. D. inueniatur prius centrum H trium punctorum A B. C. & ex H. ducatur recta ad quartũ punctum D. & diuidatur quadrifariam, vel ſumatur HI quarta pars totius HD. & erit I. *centr. ff ff* ad A. B. C D (37. & 62 *p*)

Si ex I ducatur recta IF. ad quintum punctum F. & IK. ſit quinta pars ipſius IF erit K. centrum punctorum A B. C. D F (37 & 62. *p*)

Si ex K ducatur recta KE. ad ſextum punctũ E. & ſumatur KL. ſexta pars totius KE. erit L. *centr. ff ff.* ad 6 puncta A B. C. D. F. E & ita infinite continuabitur, quouſque expleãtur omnia puncta. Hæc praxis fuſius explicanda fuit in gratiam Tyronum.

SCHOLIVM.

CVm centrum *ff ff* ſit vnicum (60 *p.*) poterit punctum L. multiplici modo inueniri, ſicut enim prima operatio facta eſt in punctis A B. fieri potuit in A C vel A. E. vel F D &c.

In ſecunda etiam operatione ſumi potuit quod-

quodlibet punctum ex reliquis, & in tertia quodlibet etiam ex reliquis, &c. Semper vltima operatio finietur in L. quæ fæcunditas erit forte operanti iucunda, & mihi quidem mirabilis est.

PROPOSITIO LXXXI.

Problema 17.

DAtis quibuscumque punctis vtcumque dispositis in plano, vel in solido, inuenire minimam summam figurarum similium inter se, quæ ex quouis spatij imaginarij puncto ad data colligi potest.

CONSTRVCTIO. Fig. 34.

SInt data puncta A B C D inueniatur centrũ minimum E *ff ff* (80. *p.*) & ducantur rectæ EA EB EC ED quæ erunt bases figurarum similium efficientium minimam summam.

Fiat præterea angulus rectus HGF & sumatur GH. æqualis EA. & GF. æqualis EB & ducta FH. sit HI. ipsi perpendicularis æqualis EC & ducta FI. sit ipsi perpendicularis IK. æqualis ED. & iungatur FK. & ita continuè fiet donec expleantur omnia data puncta. Dico FK esse basim similis figuræ, quæ est minima summa omnium quæ ex quolibet plani, vel solidi puncto assumi potest puncta A. B. C. D.

DE-

DEMONSTRATIO.

QVoniam punctum E. est *centrum fff.* ad A B C D (80. *p.*) summa figurarum ex EA. EB EC ED. erit omnium minima: sed figura ex FK facta æqualis est summæ omnium F G. GH HI. IK vel EB. EA. EC. ED (6 *p* 2.) Ergo figura similis ex FK. erit summa omnium minima Quod erat demonstrandum.

MONITVM.

OMnes rectæ, quæ ex *centro fff.* ad data puncta ducuntur, esse debent latera homologa figurarum quæ ex ipsis fiunt, aliter res non succederet: vt si figuræ similes sint trapezio LMNO. & supra AE. fiat figura similis vt AE. sit latus homologum LM. omnes rectæ EB. EC. ED & etiam FK. minimæ summæ debent esse latera homologa ipsi LM. Idem erit si AE. fiat latus homologum MN. etiam EB EC. ED. & FK &c.

Præterea minima summa inuenta FK reducenda sæpius est ad speciem dari spatij, vel ad quadratum, aut rectangulum, quod fiet quando opus fuerit ex probl. 6 praxi. 7. nostræ Geometriæ Practicæ.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII.
Problema 18.

DAtis quotcumque punctis in plano, vel in solido vtcumque, inuenire centrum ff. ff. in quouis plano dato, & minimam plani summam

EXPOSITIO. Fig. 35.

SInt data quæcumque puncta A B C D in plano, vel in solido, & datum planum GH. in quo non sunt puncta saltem omnia. Quæritur in eo punctum F. ex quo eliciatur minima omnium figurarũ similium summa, quæ ex quolibet eiusdem plani puncto elici potest.

CONSTRVCT. ET DEMONST.

INueniatur primo punctum E *centrum ff. ff.* (80 *p.*) Secundo ex E ducatur EF perpendicularis plano GH secans planum in F. Dico F. esse *centrum ff. ff* plani GH

Demonstratio constat ex 56 *p.*

Tandem ex centro F. ducantur rectæ ad data puncta A B C D & inueniatur summa figurarum omninò, vt in præcedenti (81 *p.*) Quod erat, &c.

PROPOSITIO LXXXIII.
Problema 19.

DAtis quotcumque punctis in plano, vel in ſolido vtcumque, deſcribere in dato plano circulum, vt ex quolibet circunferentiæ puncto ſumma figurarum ſimilium æqualis ſit cuicumque dato ſpatio.

EXPOSITIO. Fig. 35.

SInt data puncta A.B.C.D. in plano, vel in ſolido: & datum planum GH. in quo deſcribi debet circulus TV. vt ex quolibet circunferẽtiæ puncto T ſumma figuratum ſimilium K. quæ fieri poſſunt ex rectis TA. TB. TC. TD, æqualis ſit ſpatio dato P.

Conſtruct. Primo inueniatur E. *centrum ff ſſ* (80 *p*) & ex E. ducatur EF. plano dato HG. perpendicularis, & erit F. *centrum ff ſſ.* in plano GH (82 *p*) Deinde inueniatur minima ſumma figurarum ex F (81 *p*) & baſis ſummæ homologa baſi LM ſit NO. Præterea conuertatur P in figuram ſimilem ipſi K (6. *p* 7.) & ſit QR baſis homologa baſi LM. Diuiſa QR biſariam, fiat ſemicirculus QSR & RS. æqualis minimæ ſummæ NO & ducatur SQ.

Inſuper addatur ipſi QS. pars denominata à numero punctorum, nempè ſi puncta data

ſint

sint duo erit SX. dimidium SQ. si puncta sint tria, erit SX. tertia pars ipsius SQ. vel quarta pars si puncta fuerint quatuor, vt in præsenti, & ita infinite

Tandem diuisa XQ. bifariam, describatur semicirculus XZQ secans SR. in Z. Dico SZ. esse radium quæsiti circuli, & si sumatur FT. æquali SZ. & eo radio describatur circulus TV. & ex quolibet circunferentiæ puncto T. ducantur rectæ ad data puncta A. B C. D summa figurarum similium datæ K erit æqualis dato spatio P.

DEMONSTRATIO.

ANgulus QSR. in semicirculo est rectus (31 3) Ergo □ QR. æquale est □ RS + □ SQ similibus (41 6) sed □ QR æquale est ex constructione ○ P. Ergo ○ P. æquale est □ RS + □ SQ

Deinde cum XZQ sit semicirculus, & ZS perpendicularis diametro XQ est SZ media inter XS. SQ & sunt continuæ XS. SZ. SQ (61 6) Sed □ SZ ad □ SQ est in duplicata ratione SZ ad SQ (41 6) Ergo est vt XS ad SQ Ergo cũ XS sit quarta pars SQ erit □ SZ quarta pars □ SQ Ergo cum ○ P æquetur □ RS + □ SQ etiam ○ P æquabitur □ RS + 4 □ SZ vel 4 □ FT sed etiam summa similium figurarum

ex quolibet circunferentiæ puncto T æquatur minimæ ſummæ, nempe □ NO vel □ SR +4□FT(60 *p.*) Ergo figuræ ſimiles, vel □□. ex T. ad A B C D æquantur □ P. Quod erat demonſtrandum.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

SPatium datum P. maius eſſe debet minima ſumma RS. aliter nullus circulus poſſet deſcribi, vt ex ipſa conſtructione manifeſtum eſt.

Si planum datum HG tranſeat per *centrum* ſſ ſſ abſolutè minimum, nulla perpendicularis EE. duci poteſt, quia *centrum* E in ipſo plano eſt. Tunc ex E. ſumetur minima ſumma NO (81. *p.*) & inuenta vt antea SZ. fiat etiam E *centrum* circuli TV. Eadem enim eſt omninò & conſtructio, & demonſtratio.

PROPOSITIO LXXXIV.
Problema 20.

DAtis quotcumque punctis in plano, vel in ſolido vtcumque diſpoſitis ſphæram deſcribere, vt ex quolibet ſuperficiei puncto ſumma ſſ ſſ quæ datis ſimiles ſint, æqualis ſit cuicumque dato ſpatio

EXPOSITIO. Fig. 35.

SInt data puncta A B. C D. Quæritur ſphæra

TV.

TV. prout in theſi. Figuræ debeant eſſe ſimiles □ LM. & omnium ſumma æqualis ſpatio ○ P.

Conſtruct. Primo inueniatur *centrum ff ff.* (80 *p.*) Deinde minima ſumma RS (81. *p.*) Tertio reducatur ○ P. ad figuram ſimilem □ LM (6. *p.* 7.) & fit QR. baſis homologa LM. & ſemicirculus QSR. & in illo accomodetur RS. & ducta QS X. ſit SX. quarta pars ipſius SQ. quia data ſunt quatuor puncta A. B. C. D. & ſemicirculus XZQ determinat radium SZ quo deſcribetur ſphæra TV. ex E. *centro ff ff.* factũque erit quod petitur.

DEMONSTRATIO.

EX quolibet puncto ſuperficiei ſumma elicitur æqualis minimæ ſummæ RS + 4□ radij ET. vel SZ (60. *p.*) ſed 4□ SZ æquantur □ SQ. prout in 83 *p.* Ergo ſumma ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ puncto æquatur minimæ ſummæ + 4□ SQ hoc eſt, æquatur □ RS + 4□ SQ ſed etiam □ QR vel ○ P. æquatur □ RS + 4□ SQ (4 *l* 6) Ergo ſumma ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ puncto æquatur ○ P. Quod erat demonſtrandum.

MONITVM.

QVotieſcumque in quæſtione proponitur inueniẽda ſphæra, deſcribi debet ex ipſo cen-

centro absolute minimo *ff ff*. Circulus verò describi potest, vel ex ipso *centro* absolute minimo *ff ff*. vel ex *centro* cuiuscumque plani non transeuntis per *centr. ff ff*. vt constat ex 60. *p*.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

SPatium datum in hoc, & præcedenti problemate, debet esse maius minima summa. Quia si reducto □P ad □QR. esset □QR æquale, vel minus □SR etiam basis QR æqualis esset, vel minor, quàm SR. & descripto semicirculo QSR. non posset in eo accomodari basis RS saltem vt remaneret differentia SQ. cuius figuræ sub multiplex fieri posset figura simulis SZ. vnde nec sphæra, nec circulus describi posset deficiente radio Quæ omnia satis perspicua sunt, nec vlteriore indigẽt demonstratione.

PROPOSITIO LXXXV.

Problema 21.

DAtis quotcumque punctis vtcũque, sphæram describere ex centro ff ff vel circulum in quolibet plano, vt summa figurarum datæ similis, datam habeat ratione cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 15.

SInt data puncta A. B. C. D describenda est

sphæ-

ſphæra TV. vel circulus in plano HG, vt ſumma figurarum ſimilium datæ K, ad ſpatium etiam datum P. habeat datam rationem *ab.* ad *cd.*

Conſtruct Inueniatur primo *centrum* E. *fff ſſſ.* 80 *p* vel F. in plano HG (82. *p*) & minima ſumma ſit NO. Reducatur ▭P. ad figurã ſimilem ▭K. & ſit eius baſis *fl.* (6 *p.* 7.) fiat inſuper vt *cd.* ad *ab.* ita *fl* ad *qg* (2. *p.* 7) & inter *fl.* & *qg.* inueniatur media *py* (2 *p.* 5.)

Rurſus ſumatur QR. æqualis mediæ inuentæ *py.* & RS. æqualis minimæ ſummæ NO. reliqua perficientur vt in 83. vel 84. *p.* & deſcribatur circulus radio SZ. ex centro F. plani HG. vel ſphæra ex *centro* abſolute minimo *fff ſſſ.* E. Dico ſatisfactum eſſe quæſtioni.

DEMONSTRATIO.

CVm tres rectæ *qg. py. fl.* ſint continuæ, erit ▭*py* ad ▭*fl* vt *qg.* ad *fl* (4 *l.* 6.) hoc eſt vt *ab.* ad *cd.* ex conſtructione: ſed ▭ *py.* æquatur ex conſtructione ▭QR. vel ▭RS+▭SQ (4 *l* 6) hoc eſt ▭RS+4▭SZ. vel TT. ex demonſt 19 *p.* Ergo minima ſumma, nempe ▭RS. vel ▭NO +4▭FT. ſunt ad ▭ *fl.* vt *ab* ad *cd* (1 *l.* 5) Sed ex conſtructione ▭ *fl* æquatur ▭P. Ergo minima ſumma ▭NO+4▭FT. ſe habent ad ▭ P. vt *ab.* ad *cd.* (2 *l.* 5.) ſed ſumma *fff ſſſ.* ex quolibet

libet puncto circunferentiæ, vel ſuperficiei ſphæricæ æquatur minimæ ſummæ □NO + 4□radij FT (60 *p*) Ergo ſumma *ff ff*. ex quolibet circunferentiæ circulis, vel ſuperficiei ſphæricæ puncto ad ſpatium datum ○P. datam habet rationem *ab*. ad *cd*. Quod faciendum, & demonſtrandum erat.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio data *ab*. ad *cd*. maior eſſe debet, quàm ratio minimæ ſummæ ad ſpatium datum, nempe quam ratio □NO. ad □*fl* vel ○P.

Demonſtratio perſpicua eſt. Cum enim ſi ex *centro ff ff*. deſcribatur ſphæra, vel circulus, ſumma ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ, vel circunferẽtiæ circularis puncto maior ſit minima ſumma totidem figuris ſimilibus radij (60 *p*.) ratio ſummæ ex quolibet puncto maior erit quàm ratio minimæ ſummæ ad quodcumque ſpatium datum (3 *l*. 5.) Quarè ſi inuematur ratio minimæ ſummæ ad ſpatium datum (6 *p*. 7.) determinatum erit an problema poſsibile, vel impoſsibile ſit. Si ratio ſit eadẽ, minima ſumma erit quæſita, ſed nulla ſphæra, nec circulus deſcribi poterit.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI.
Problema 22.

DAtis quibuslibet punctis in plano, vel in ſolido vtcumque diſpoſitis, ſpheram deſcribere, vel in quouis dato plano circulum: vt ſi ſumma ff ſſ. ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ, vel circumferentiæ circularis puncto addantur, vel ſubtrahantur quotcumque figuræ ex radio ſphæræ, vel circuli, interſe, & prioribus ſimiles: aggregatum, vel reſiduum datam habeat rationem cuilibet ſpatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 35.

SInt data puncta 4. nempe A. B C D. Quæritur ſphæra TV. ex *centro* E. vel in dato plano GH quæritur circulus TV. ex *centro* plani F. vt ſi ex quolibet puncto T. colligatur *ſumma ff ſſ* ▭ K illique addantur, vel ſubtrahantur 2 *ff ſſ*. vel plures factæ ex radio ET. vel FT. aggregatum, vel reſiduum ſit ad ſpatium datum ▭P in data ratione *ab* ad *cd*. Et quoniam varij caſus additionis, & ſubtractionis poſſunt contingere, ſingillatim omnes explicandi ſunt.

Conſtructio Primo inueniatur *cẽtrum ff. ſſ.* E. (80 *p.*) & ſi datum ſit planum GH *centrum* F. (81. *p*) 2. Colligatur minima ſumma ex E.

vel F.(81.*p*.) & fit □NO. 3 Reducatur ○P. ad figuram ſimilem ipſi □K cuius baſis ſit *fl.*(6.*p*. 7.) 4 Fiat vt *cd* ad *ab*. ita *fl*. ad *qg* (2.*p*.7.) & inter *fl* & *qg* inueniatur media proportionalis *py* (2.*p*.5.) 5. Sumatur QR æqualis *py*. ſi hæc maior fuerit quã NO. & in ſemicirculo QSR. accomodetur RS. æqualis NO. vel *è contra* ſi NO. fuerit maior, ipſi fiat æqualis QR. & RS. ipſi *py* & ducatur QSX. hæc communia ſunt.

Caſus 1. Numero dato punctorum A. B. C. D nempe 4. ſi figuræ ex radio addendæ ſint. addatur numerus figurarum: quæ in noſtro exemplo ſunt 2*ſſſſ*. ex radio: & ſiunt 6. Sumatur ergo SX. ſexta pars ipſius QS & deſcripto ſemicirculo X Z Q. erit SZ. radius ſphæræ ex E. deſcribendæ, vel circuli ex F.

Caſus 2. Si figuræ ex radio ſubtrahendæ ſint, & numerus figurarum fuerit minor punctorum numero: ille ſubtrahatur ab iſto, nempe 2*ſſ*. a 4 punctis, reſiduum erit 2. Fiat igitur SX ſecunda pars, vel dimidium ipſius QS. & deſcripto ſemicirculo, erit SZ. radius ſphæræ, vel circuli.

Caſus 3. Si numerus figurarum ſubtrahendus æqualis ſit punctorum numero, quælibet ſphæra ex E. vel circulus ex F quæſtioni ſatisfaciet.

Ca-

Caſus 4. Si numerus figurarum ſubtrahendus nempe 7 *ff* maior ſit punctorum numero 4 auferatur *è converſo* 4. ex 7. reſiduum erit 3. Tunc fiet QR. æqualis NO & RS. æqualis *py*. & SX. erit tertia pars ipſius QS. iuxta numerum reſiduum 3. & SZ. erit radius quæſitus.

DEMONSTRATIO.

CVm E ſit centrum *ff ff*. ſumma ex quolibet puncto T. æquatur minimæ + 4 *ff ff* ex ET. (60. *p*.) Ergo additis pro *caſu* 1. 2 *ff*. ET (vel ablatis pro *caſu* 2.) aggregatum erit æquale minimæ ſummæ + 6 *ff*. ET. vel SX. ſed cum QS. ſit ſextupla SX. & SZ. media (6. *l*. 6) ▱ QS. æquatur 6 ▱ SZ (4 *l*. 6) Ergo aggregatum erit æquale minimæ ſummæ ▱ RS + ▱ QS hoc eſt ▱ QR vel ▱ *py*. ſed ▱ *py*. ad ▱ *fl* vel ○ P. eſt vt *gg*. ad *fk*. (4 *l*. 6) vel ex conſtructione, vt *ab*. ad *cd*. Ergo aggregatum, vel ſumma ex T + 2 *ff*. ET eſt ad ○ P. datum in data ratione *ab*. ad *cd*. & eadem eſt demonſtratio de reſiduo pro *caſu* 2.

In *caſu* 3. Cum in qualibet ſphæra ſumma ex T æqualis ſit minimæ + 4 *ff*. ET ablatis 4 *ff*. ET. ſemper remanet minima ſumma: Ergo omnis ſphæra quæſtioni ſatisfacit ſi minima ſumma ſit ad ſpatium datum in data ratione; aliter nulla.

In *casu* 4 Summa ex T. æquatur minimæ + 4 *ff*. ET. ergo ablatis 7 *ff* ET. erit residuum æquale minimæ summæ — 3 *ff*. ET. vel SZ. hoc est æquale □QR — □SQ ex constructione Ergo residuum æquale erit □SR. (4. *l* 6.) vel □ *py*. sed □ *py* ad □ *fl*. vel □P. est vt *qg*. ad *fl* vel *ab* ad *cd* ex constructione. Ergo residuum erit ad spatium datum □P. in ratione data *ab*, ad *cd* Quod erat, &c.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio data in *casu* 1. & 2 maior esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum, in 3 eadem, & in 4 minor Quæ omnia ex constructionis demonstratione satis manifesta sunt.

PROPOSITIO LXXXVII.

Problema 23.

DAtis quotcumque punctis in plano, vel in solido, vtcumque dispositis inuenire centrũ absolute minimum ff dd. vel centrum in dato plano.

EXPOSITIO. Fig. 36.

SInt in eodem plano, vel in diuersis, nempe in solido puncta A. B C. D E. Quæritur punctum O. *centrum* figurarum dissimilium, vt ductis OA. OB. OC. OD. OE figura △OA. simi-

milis debeat esse △P & □OB similis □Q. & ▭OC similis ▭R. & ⏢OD. similis ⏢S. & ○OE similis ○T. & summa ex O. sit omnium minima. Inuentio huius *centr ff.dd* operosior est, quam inuentio *centri fff.* ea tamen sic perficietur.

Constructio. Primo ad confusionem, & æquiuocationem vitandam, singulis punctis apponantur figuræ datis similes iuxta quæstionis tenorem, prout apparet.

Deinde assumantur quæcumque duo puncta, vel AE vel BD. &c. assumo igitur A & B. & ducta recta AB diuidatur in F. vt △FA. simile △P sit minimum □FB simile □Q (73. *p.*) & erit *centr ff dd* ad A. & B. Ex inuento centro F ducatur recta ad tertiũ punctum quodlibet E. vel D. vel C. Sit ergo recta FC quæ diuidatur in G ita vt ▭GC simile dato ▭R minimum sit △GF & □GF. nempe duabus figuris ex GF quæ similes sint datis △P. & □Q. (78 *p.*) & erit G *centr ff.dd.* ad A. B. C.

Iterùm ex inuento centro G. ducatur recta ad quodlibet punctum ex reliquis, & sit GD. quæ diuidatur in H vt ⏢HD simile ⏢S minimum sit ad tres figuras HG similes iam positis △P □Q ▭R hoc est vt ⏢HD minimum sit ad summam △HG + □HG + ▭HG (78 *p.*)

De-

Denique ex H. ducatur recta ad quintum punctum E & diuidatur HE. in O. vt ○OE. simile dato ○T. minimum ad summam quatuor figurarum supra OH similium datis △P. □Q. ▭R. ○S. nempe ○OE. minimum sit △OH+□OH+▭OH+○OH. & ita infinitè continuabitur donec omnia expleantur puncta. Dico vltimum punctum inuentum O. esse *centrum ff dd* ad data puncta A.B.C D.E.

DEMONSTRATIO.

CVm AB. diuisa sit in figuras minimas △FA. & □FB est F. centrum ad A. & B (34 *p.*) & cum FC. sit à centro F. ad tertium punctum, & ▭GC. minimum sit △GF+□GF. est G. centrum ad A.B.C (62 *p*) & cum ex centro G. sit GD. ad quartum punctum & ○HD. minimũ ▭HG+□HG+△HG. est H. cẽtrum ad A. B. C.D (62 *p.*) & similiter O ad A.B C D. E. & ita infinite. Quod erat efficiendum, & demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXVIII.
Problema 24.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque inuenire minimam summam figurarum datis similium, & inter se dissimilium.

2 *Inuentam summam, & singulas figuras ad quadratum reducere.*

EXPOSITIO. Fig. 36.

SInt data puncta A. B. C. D. E. in plano, vel in solido: & sit O *centrum ff dd* quæ similes sint datis △P. □Q. ▭R. ⬠S. & ○T. Quæritur minima summa △OA + □OB + ▭OC + ⬠OD + ○OE & simul Quadratum inuentæ summæ æquale; & singula quadrata singulis figuris æqualia.

Constructio. Assumatur ad libitum quælibet recta IK. supra quam fiat rectangulum I*v*. æquale △OA (ex 6. *p* 6.) & supra L*v* fiat rectangulum L*a*. æquale □OB & supra M*a* fiat rectangulum M*b*. æquale ▭OC & supra N*b*. fiat rectangulum N*c*. æquale ⬠OD & supra V*c*. fiat rectangulum V*d*. æquale ○OE. Dico esse I*d*. summam omnium, vel minimam summam.

Ad Quadrata facile reducentur hac arte: Fiat *dl*. æqualis *d*K. & *ch*. æqualis *cd*. & *bg* æqualis

lis *bc* & *ax* æqualis *ab* & *vf.* æqualis *va* & *Ke.* æqualis *Kv* & describantur semicirculi supra *Ie. Lf Mx Ng Vh ri.* fiant semicirculi secantes *Ky.* in *m n.o p q y.* Dico Quadratum *Km* esse æquale △ *OA.* & Quadratum *vb.* æquale □ *OB* & Quadratum *an.* æquale ▭ *OC* & Quadratum *bp.* æquale ⬠ *OD.* & Quadratum *cq* æquale ⬡ *OE* & Quadratum *dy* æquale minimæ summæ *Id.*

DEMONSTRATIO.

PRimo ex constructione rectangula *Iv Le. Mb Nc. Vd.* æqualia sũt △ *OA.* □ *OB.* ▭ *OC.* ⬠ *OD.* ⬡ *OE* Ergo cum *Id.* æquale sit rectangulis *Iv Le. Mb. Nc. Vd* (1. *l* 2) erit *Id.* summa omnium minima, æqualis scilicet △ *OA* + □ *OB* + ▭ *OC* + ⬠ *OD* + ⬡ *OE* &c.

Secundo *dy.* media est inter *rd. dl.* vel *dK.* (6. *l* 6.) Ergo Quadratum *dy.* æquale est ▭ *Id.* (1. *l.* 6.) nempe minimæ summæ. Similiter *Km.* media est inter *IK. Ke.* vel *Kv.* & *vn* media inter *Lv vf* vel *va.* & *ao.* media inter *Ma.* & *ax.* vel *ab.* & *bp.* media inter *Nb bg.* vel *bc* & *cq.* media inter *Vc. ch.* vel *cd.* (ex 6. *l* 6.) Ergo □ *Km.* æquale est rectangulo *IKe.* vel *Iv.* vel △ *OA.* (1. *l* 6.) & sic de reliquis. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO LXXXIX.
Problema 25.

DAtis quibuscumque figuris rectam inuenire, supra quam totidem figuræ dd. datis similes constitutæ, æquales sint quadrato, vel cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. *Fig. 36.*

DAtæ sint figuræ △P. □Q ▭R. ⬠S ⬡T, quæritur recta Z. supra quam △Z. □Z. ▭Z. ⬠Z. ⬡Z. æquales sint quadrato dato, nempe □Y. vel cuicunque spatio cui □Y. sit æquale.

Construct. Assumpta qualibet recta X. fiant supra ipsam △X. □X. ▭X. &c datis △P. □Q. &c. similia. Deinde inueniatur summa △X + □X + ▭X + ⬠X + ⬡X (88 *p.*) & sit *Id* quæ reducatur ad quadratum *dy.* vt in præcedenti.

Præterea fiat vt inuenta *dy.* ad assumptam X. ita data Y. ad quartam Z. (2. *p.* 7.) Dico rectam Z esse quæsitam, & △Z + □Z + ▭Z + ⬠Z + ⬡Z. æquari □Y.

DEMONSTRATIO.

QVoniam sunt proportionales vt *dy.* ad X. ita Y. ad Z. ex constructione, etiam alternando proportionales erunt, vt *dy.* ad Y. ita X.

ad Z (4 *l.* 5) Ergo etiã figuræ ſimiles deſcriptæ, proportionales erunt (4. *l* 6) nempe vt □ *dy.* ad □Y ita △X+□X+▭X+⬠X+⬡X. ad △Z+□Z+▭Z+⬠Z+⬡Z. Ergo etiam alternando vt □ *dy.* ad △X+□X+▭X+⬠X+⬡X. ita □Y. ad △Z+□Z+▭Z+⬠Z+⬡Z (4 *l.* 5) ſed □ *dy.* æquatur △X+□X+▭X+⬠X+⬡X. ex conſtructione: Ergo etiam □Y. æquatur △Z+□Z+▭Z+⬠Z+⬡Z. Quodefficiendum, & demonſtrandumerat.

Si autem ſpatium datum non fuerit quadratum, reducetur ad quadratum ex 88. *p.* & ſit □Y. æquale ſpatio dato. Quo poſito inſtituetur operatio omninò vt antea, & eadem erit demonſtratio. Quod in ſequentibus ſæpiſſimè obſeruandum erit.

PROPOSITIO XC.

Problema 26.

REctam inuenire ſuper quam figuræ datis ſimiles conſtitutæ: & aliæ datis etiam ſimiles, datam habeant differentiam, æqualem ſcilicet cuilibet ſpatio dato.

EXPOSITIO. Fig 36.

DAtæ ſint ſpecies figurarum △P. □Q. ▭R. ⬠S. ⬡T. Quæritur recta Z vt ſumma △Z+□Z+▭Z. datis ſimilium, & ſumma ⬠Z+⬡Z.

⬠Z differant dato ſpatio □ Y. vel vt differentia vtriuſque ſummæ ſit æqualis □ Y.

Conſtruct. Aſſumpta quælibet recta X. fiãt ſupra ipſam △X □X ▭X & inueniatur eorum ſumma, nempè □ *at.* (88. *p.*) ſimiliter ſupra eandem X fiant ⬠X ⬠X & inueniatur eorum ſumma, ſcilicèt □ *ts.* (88. *p.*) Deſcripto ſupra *at* ſemicirculo *asr.* ipſi accomodetur *ts.* & ducatur *as.* Præterea fiat vt inuenta *as.* ad aſſumptam X. ita data Y. ad quartam Z. (12. *p.* 7.) Dico rectam Z. eſſe quæſitam, & ſatisfacere quæſtioni.

DEMONSTRATIO.

QVoniam ſunt ex conſtructione proportionales, vt *as.* ad X. ita Y. ad Z. & alternando vt *as.* ad Y. ita X. ad Z (4 *l.* 5.) etiam figuræ ſimiles erunt proportionales (4 *l.* 6.) vt □ *as.* ad □ Y. ita △X + □X + ▭X − ⬠X − ⬠X ad △Z + □Z + ▭Z − ⬠Z − ⬠Z. Ergo etiam alternando vt □ *as.* ad △X + □X + ▭X − ⬠X − ⬠X. ita □ Y. ad △Z + □Z + ▭Z − ⬠Z − ⬠Z. (4 *l.* 5.) ſed □ *as* eſt differentia quadratorum, nempè □ *at* − □ *ts* (4 *l.* 6.) quia angulus in ſemicirculo rectus eſt (3. *l.* 3.) & □ *at* − □ *ts.* ex conſtructione æquale eſt △X + □X + ▭X − ⬠X − ⬠X Ergo □ Y. erit etiam æquale △Z + □Z + ▭Z − ⬠Z − ⬠Z. Ergo ſumma △Z +

□Z+▭Z. & ſumma ⬠Z+⬡Z. habent differentiam datam, æqualem ſcilicet □Y. Quod erat demonſtrandum.

Si ſpatium datum non fuerit quadratum reducetur ad illud, ſicut in præcedenti.

PROPOSITIO XCI.

Problema 27.

REctam inuenire ſupra quam alia, & alia figuræ conſtitutæ datis ſimiles, ſummam efficiant, vel differentiam habeant in data ratione cuilibet ſpatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 23.

SPecies figurarum datæ ſint △P. □Q. ▭R. ⬠S. ⬡T. Quæritur recta Z. vt ſumma omnium figurarum, nempe △Z+□Z+▭Z+⬠Z+⬡Z. ad ſpatium datum □Y. ſit in ratione data IL ad LN. vel quæritur Z. vt differentia ſimilium △P. □Q. ▭R. & ſimilium ⬠S. ⬡T. ad ſpatium datum □Y. ſit in data ratione IL. ad LN. hoc eſt vt △Z+□Z+▭Z−⬠Z−⬡Z. ſit ad □Y. vt IL. ad LN.

Conſtruct. Primo inueniatur LM. media inter IL. & LN. (2.*p.*5) Deinde fiat vt LM. ad ad IL. ita Y. ad *nz.* (2 *p.*7) & ſi quæritur Z. vt omnium ſumma ſit in data ratione: inueniatur Z. vt ſumma △Z+□Z+▭Z+⬠Z+⬡Z. æqua-

æqualis sit □*u*. ex 89. *p*. & recta Z. erit quæsita.

Secundo si quæratur Z. vt differẽtia vtriusque summæ &c. inueniatur Z. vt △Z+□Z+▭−⬠Z−⬡Z. æqualis sit □*u*. ex 90. *p*. & recta Z quæstioni satisfaciet.

DEMONSTRATIO.

QVoniam ex constructione, tã summa △Z+□Z+▭Z+⬠Z+⬡Z quam summarum differentia supra Z. nempe △Z+□Z+▭Z−⬠Z−⬡Z. æquales sunt □*u*. sed □*u* ad □Y. est in duplicata ratione *u* ad Y (4. *l*. 6) vel ex constructione in ratione duplicata IL. ad LM. hoc est vt IL. ad LN. cum sint continuæ ex constructione IL. LM. LN. Ergo tam summa supra Z. ex 89 *p*. inuenta, quam differentia supra Z. ex 90. *p*. inuenta erit ad datum spatiũ □Y. in ratione data IL. ad LN (1. *l*. 5.) Quod faciendum, & demonstrandum fuerat

Problema omnem rationem admittere potest, dum summa affirmata signo + maior sit negatiua signo −. nec aliam determinationem requirit.

PRO-

PROPOSITIO XCII.
Problema 28.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque dispositis ex eorum centro ff. dd. sphæram describere, vt summa figurarum datis quibuscumque similium, & inter se dissimilium, ex quolibet superficiei puncto sit æqualis cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 26.

SInt data pũcta A.B.C.D.E Figuræ datæ △P. □Q. ▭R. ⏢S. ⬡T. quæritur *centrum* O. & radius sphæræ ex *centro* O. describendæ, vt ex quolibet superficiei puncto summa figurarum similium △P. □Q. &c. æqualis sit ▭ *z.* in *fig.* 24.

Construct. Primo ▭ z. reducatur ad □ *et.* (ex 88 *p.*) & diuisa basi *et.* bifariam, fiat semicirculus *est.*

Deinde inueniatur O. *centrum ff. dd.* (87 *p.*) & minima figurarum summa datis similium *Id.* quæ reducatur etiam ad quadratum *dy.* (88. *p.*)

Præterea fiat *ts.* æqualis *dy.* & ducatur *se.*

Tandem inueniatur recta F*f.* vt quinque figuræ datis similes supra ipsam, nempe △F*f* + □F*f* + ▭F*f* + ⏢F*f* + ⬡F*f* æquales sint □ *es.*

Di-

Dico rectam *Ff.* esse radium sphæræ, quæ si eo radio describatur ex O. satisfaciet quæstioni.

DEMONSTRATIO.

QVoniam O. est *centrum ff dd* ex constructione, descripta ex eo sphæra radio *Ff.* summa ex quolibet puncto superficiei superabit minimam totidem figuris similibus ex eodem radio (60. *p.*) nempe △*Ff*+ □ *Ff.* &c. Ergo cum □ *st* sit ex constructione minima summa, summa ex sphærica superficie superabit □ *est.* 5 *ff* ex radio *Ff* nempe △*Ff*+ □ *Ff*+ ▭*Ff* &c. sed 5*ff* ex *Ff* nempe △ *Ff*+ □ *Ff* &c. æquantur ex constructione □ *es.* Ergo summa ex sphærica superficie superat minimam, scilicet □ *st* toto □ *es* sed □ *z.* hoc est □ *xt.* superat □ *st* minimam summam toto □ *es* (4 *l.* 6) cũ angulus E. sit in semicirculo rectus (3 *l.* 3.) Ergo summa figurarum datis similiũ ex quocumque superficiei sphæricæ punto ex *centro* O. descriptæ radio *Ff* æquatur □ *z.* dato. Quod erat efficiendum, & demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.
Problema 29.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque circulum describere in dato quolibet plano, vt summa figurarum datis similium ex quouis circunferentiæ puncto æqualis sit cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

SInt data puncta A. B. C. D. E. in plano, vel in solido. Datum planum quodlibet XZ vtcũque, siue in eo sint aliqua puncta, siue nullum: datum spatium sit □K. Quæritur circulus HI. in plano XZ. vt ex quolibet circunferentiæ puncto ducantur rectæ ad data puncta A. B. C. D. E. summa figurarum datis similium, & inter se dissimilium, æqualis sit □K dato.

Construct. Primo reducatur □K ad □L. Secundo inueniatur *centrum ff. da.* F ad data puncta A. B. C. D. E. (87 *p.*) Tertio ducatur ex F. recta FG. plano XZ perpendicularis. Quarto inueniatur summa figurarum datis similiũ ex G ad A. B. C. D. E. & sit □M. (88 *p.*) Quinto fit □L æquale □M + □N (6 *p.* 2.) Inueniatur recta O. vt 5 *ff.* ex O factæ, similes datis æquales sint □N (89. *p.*) Dico O. esse radium quæsiti circuli. Si ergo ex G. radio GH ipsi O. æqua-

æquali describatur circulus HI in plano XZ. quæstioni satisfaciet.

DEMONSTRATIO.

CVm enim sit F *centrum* absolutè minimũ ad A B.C.D.E. ex constructione, & FG. plano perpendicularis, erit G *centrum* plani XZ. ad eadem puncta (56 *p*.) & descripto circulo HI. summa *ff.* ex quouis puncto superabit minimam ex G. quinque *ff.* GH (60 *p*.) hoc est, superabit □M. quinque *ff.* O. Ergo sũma æquabitur □M+□N. hoc est, æquabitur □L. vel □K. ex constructione. Quod fuerat demonstrandum.

DETERMINATIO PROBL. 26. & 27.

SPatium datum maius esse debet, quam summa ex centro sphæræ describẽdæ in 92 *p*. vel circuli in 93. *p*. Cum enim summa ex quolibet puncto superficiei, vel circunferẽtiæ maior sit quàm summa ex centro totidem figuris ex radio: vt illa possit spatio dato æqualis esse debet hoc summam ex centro excedere, aliter erit quæstio omninò impossibilis.

PROPOSITIO XCIV.
Problema 30.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque ex eorum centro sphæram describere, vel in quouis plano circulum, vt ex quolibet superficiei, vel circunferentiæ puncto, summa ff dd datis similium, datam habeat rationem cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

SInt data puncta A.B.C.D.E. eorum *centrum* F.(87 *p.*) spatium datum △K. Ratio data R ad S. Quæritur radius sphæræ FP. vt summa *ff dd* datis similium ad △K. datam habeat rationem R. ad S.

Construct. Primo reducatur △K. ad □V. & fiat vt S. ad R. ita V. ad T (2. *p* 7.) & sit Y. media inter V. & T.(2 *p* 5.) Inueniatur minima summa ex F ad A.B.C.D.E (88 *p.*) & sit □ M. Præterea in fig. 24 BC æqualis Y. & descripto semicirculo BEC. sit CE æqualis M. & ducatur BE. Inueniatur postea F vt 5 *ff dd* datis similes æquales sint □BE Dico F. esse radium sphæræ: descripta ergo hoc radio sphæra FP. in fig. 25. satisfaciet quæstioni.

DEMONSTRATIO.

CVm sint cõtinuæ ex constructione T. Y. V.

erit

erit □Y. ad □V. ſicut T. ad V (4 *l.* 6.) hoc eſt ex conſtructione vt R. ad S. ſed □Y. eſt □BC. ex conſtructione: hoc eſt □CE+□EB. (4 *l.* 6.) hoc eſt minima ſumma □M+5*ff dd.* ex F datis ſimiles ex conſtructione. Ergo minima ſumma nempe □M+5*ff dd* FP. radij datis tamen ſimiles ſunt ad □V. vel △K. in data ratione R. ad S (1 *l.* 5.) ſed ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ puncto ſumma æquatur minimæ ſummæ, ſcilicet □M+5*ff dd* radij FP. quæ ſint datis ſimiles (60 *p.*) Ergo ſumma ex quouis ſuperficiei ſphæricæ puncto eſt ad △K. in data ratione R. ad S. Quod erat demonſtrandum, &c.

Si in dato plano XZ. licet in eo nullum ſit punctum, quæratur circulus HI. quæſtioni ſatisfaciens, ducatur ex F recta FG. plano perpendicularis: & inueniatur minima ſumma ex G. in reliquis eadem eſt omninò conſtructio, & demonſtratio.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio data R. ad S maior eſſe debet quàm ratio minimæ ſummæ ad ſpatium datum, nempe maior quàm ratio □M. ad □V. aliter quæſtio erit impoſsibilis. Huius demonſtratio eadem eſt, ac propoſita in 85 *p.*

PROPOSITIO XCV.
Problema 31.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque, & qualibet recta, vel curua etiam vtcumque totidem rectas ex datis punctis inflectere ad idem rectæ, vel curuæ data punctum concurrentes, vt summa ff. datis similium, siue inter se similes, siue dissimiles sint, datam habeat rationem cuilibet spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 37.

SInt data puncta A. B. C. D. E. in plano, vel in solido, & data quæuis recta, vel curua PQ. vel IH. in quouis plano XZ. quæritur vt ad idem punctum P. vel H. rectæ, vel curuæ datæ inflectantur ex datis punctis rectæ AP. BP. &c vt summa *ff. dd.* quæ datis dissimulibus, vel similibus inter se, similes sint datam habeat rationē ad quodlibet spatium datum □K. nempè vt R. ad S.

Construct. Primo inueniatur *centrum ff ff* vel *dd.* F. ex 80. vel 87. *p.* Secundo reducatur □K ad □Y & inueniatur minima summa ex F (81. vel 82. *p.*). Tertio inueniatur sphæra GHN vt ex quolibet puncto superficiei summa *ff ff* vel *dd* datis similium datam habeat rationem R ad S. ex 85. vel 94 *p.* quæ secet datam cur-

curvam, vel rectam PQ. in P. & Q. Dico puncta P. Q. rectæ, vel curvæ PQ. satisfacere quæstioni.

Si verò recta, vel curva data sit IH. in plano dato XZ. ex eius *centro ff.* vel *dd* G. iuxta quæstionem inuento ex 82 *p.* vel 87 *p* & describatur circulus ex *centro* G. iuxta quæstionem ex 83 *p* vel 93. *p.* qui secet rectam, vel curvam datam in H & I Dico pũcta H & I. quæstioni satisfacere.

DEMONSTRATIO.

PVncta inuenta P Q. sunt in superficie sphærica, cum ibi recta, vel curva secent illam: Ergo *summa ff* datis similium erit ad □K in data ratione R ad S (ex 85. vel 94 *p*)

Similiter cùm puncta H I sint in circumferentia circuli IH *summa ff* datis similium erit ad □K in data ratione R. ad S (ex 85. vel 94 *p.*) Quod erat demonstrandum.

Ratio data non debet esse minor, quàm ratio summæ ex superficie sphærica rangẽte rectam, vel curvam datam: hoc est, non debet esse minor quàm ratio minimæ summæ + tot *ff.* datis similium ex breuissima distantia à cẽtro in rectam, vel curvam ad spatium datum, aliter sphæra nec secaret, nec tangeret rectam, nec curvam, & esset quæstio impossibilis.

PRO-

PROPOSITIO XCVI.
Problema 31.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque totidem rectas inflectere ad idē cuiuslibet plani dati punctum, vt summa aliquarum figurarum datis similium datam habeat rationem cuilibet spatio dato, & omnium summa, vel aliarum summa quibuscumque alijs etiam datis similium, datam aliam rationem habeat cuilibet alteri spatio dato.

EXPOSITIO. Fig. 38.

SInt data puncta A B C D E F G H in vno, vel in diuersis planis: in vno, vel in diuersis solidis. Planum datum PQ licet in eo nullum sit punctum datum: sint data spatia □ X. & □ Y. datæ rationes R ad S. & T. ad V. Quæritur vt ad idem punctum M plani PQ. inflectātur ex datis pūctis rectæ A M B M. &c. vt summa *ff dd* □ B M + □ C M + ○ E M. datis □. □ ○. similium ad □ X. sint vt R ad S. & summa reliquarum *ff dd*. △ A M + ▱ D M + △ H M + ▱ G M + ○ F M datis △ ▱. △ ▱ ○ similiū ad □ Y datam aliam habeat rationem T. ad V.

Constructio Primo inueniatur *centrum* ad assignata ex vna parte puncta B. C E. quod sit L. (87. *p.*) Ex quo ad planum PQ ducatur perpen-

pendicularis LO. & ex O. deſcribatur circulus MN vt ex quolibet circunferentiæ puncto ſumma *ff. dd* datis ▱. □. △. ſimiliũ ſit ad □X. vt R ad S. (94 *p*)

Secundo inueniatur *centrum ff. dd.* ad aſsignata puncta ex alia parte A. D. H. G. F (87 *p.*) & ſit pũctum I. Ex quo ducatur plano PQ. perpendicularis IK. & ex K. deſcribatur circulus MN. vt ex quolibet circunferentiæ puncto ſumma *ff. dd.* datis △ ▱. △. ▱. O. ſimilium ad ſpatium datum □Y. datam habeat rationem T. ad V (94 *p*) Si circuli ſe interſecant in M. & N. Dico vtrumque punctum M. vel N. quæſtioni propoſitæ ſatisfacere.

DEMONSTRATIO.

CVm puncta M. & N ſint vtrique circunferentiæ communia vbi circuli ſe mutuo ſecant ſumma *ff. dd.* nempe □BD+□CM+▱EM eſt ad ſpatium datum □X vt R. ad S (ex 94. *p.*) vel ex conſtructione: ſimiliter ſumma *ff. dd* △AM+▱DM+△HM+▱GM+▱FM. ad □Y eſt vt T. ad V. (ex 94 *p*) vel ex conſtructione: Ergo Punctum M. quæſtioni ſatisfacit. Idemque eſt de puncto N. Quod efficiendum, & demonſtrandum erat.

Eadem omninò eſt conſtructio, & demonſtratio ſi in ſecunda parte aſſumenda ſint om-

nia

nia puncta A.B.C.D.E.F.G.H. dum inuenia-tur ad omnia *centrumff dd.* I. & in reliquo ope-ratio instituatur vt antea.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

EX ipsa constructione patet determinatio problematis: si enim descripti circuli se nõ intersecant, vel tangunt, erit quæstio impos-sibilis. Vnde summa radiorũ nequit esse mi-nor, quàm distantia centrorum K & O. dati plani PQ. Præterea quælibet ratio data ma-ior esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum. Quæ omnia satis ex præce-dentibus constant.

PROPOSITIO XCVII.
Problema 33.

DAtis quibuslibet punctis vtcunque, totidẽ rectas inflectere ad idem plani dati pun-ctum, vt summa aliquarum figurarum datis si-milium, datam habeat rationem cuilibet spatio dato, & omnium, vel reliquarum summa datis etiam similium aliam datam habeat rationem priori summæ.

EXPOSITIO. Fig. 31.

SInt data puncta A.B.C.D.E.F.G.H. Planum datum PQ. Spatium datum □X. rationes datæ R. ad S & *cd.* ad *gi.* species datæ quæ in pũ-

ctis

etis A B.C.&c. appositæ sunt. Quæritur punctum M vel N. ad quod inflectantur rectæ ex A B &c. ita vt suma □B+□C+○E. ad □X. sit vt R. ad S. & omnium summa, nempe △A +□B+□C+▱D+○E+○F+▱G+△H. ad priorem summam □B+□C+○E. sit in data ratione *cd* ad *gi*.

Construct. Primo inueniatur *mn*. media inter R & S. & fiat vt *mn*. ad R. ita X. ad *ab*. Itē vt *gi* ad *cd*. ita *ab*. ad *xz*. & inueniatur *pq*. media inter *ab. xz*. Omnia ex 7. probl. nostræ Geometriæ practicæ.

Secundo inueniatur *centrum ff. dd*. ad puncta assignata ex vna parte B C. E (87. *p*.) & sit L. & LO sit plano PQ. perpendicularis. Deinde inueniatur *centrum ff dd* ad puncta assignata ex alia parte, siue sint omnia, siue reliqua tantum sint modo omnia A B.C D.E F G.H. & sit *centrum* I. (87 *p*.) & IK. perpendicularis plano PQ.

Tertio ex O describatur circulus O M N vt ex quolibet circunferentiæ puncto summa *ff dd*. ad B C.E. æqualis sit □*ab* (93 *p*.) Similiter ex K describatur circulus K M N vt ex quouis circunferētiæ puncto summa ad A B. C.&c æqualis sit □*pq*. (93 *p*.) Dico quodlibet punctum intersectionis circulorum, scilicet

M. vel N. quæstioni satisfacere: & summam □ BO + □ CO + □ EO. ad □ X. esse vt R. ad S & summam △ AK + □ BK + □ CK + □ DK + □ EK + □ FK + □ GK + △ HK. ad summam □ BO + □ CO + □ EO. esse in ratione data *cd.* ad *gi.*

DEMONSTRATIO.

QVoniam summa ex O ad B C. E. æquatur □ *ab.* ex constructione, & *ab* ad X est vt R. ad *mn.* ex cõstructione: ex qua etiã sũt continuæ R. *mn.* S erit summa ex O. ad B. C. E. vel □ *ab.* ad □ X. in duplicata ratione R ad *mn* hoc est vt R ad S (4. *l* 6) Quod erat primò demonstrandum.

Deinde cũ summa ex K ad A. B C &c æqualis sit ex constructione □ *pq.* & summa ex O ad B. C E sit æqualis □ *ab.* erit illa summa ad istã, vt □ *pq.* ad □ *ab.* hoc est vt *xz* ad *ab* (4. *l* 6.) cũ sint continuæ *xz. pq ab.* ex constructione: sed vt *xz* ad *ab* ita *cd* ad *gi* ex constructione. Ergo summa △ AK + □ BK + □ CK &c. ad summam □ BO + □ CO + □ EO. est vt *cd.* ad *gi.* Quod secundo erat demonstrandum.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

RAtio pro prima parte data maior esse debet quàm ratio minimæ summæ ad spatiũ datum prout in 94. *p.* Ratio verò pro secunda par-

parte maior esse debet, quàm ratio minimæ summæ ex assignatis punctis ad □*ab* vel summa radiorum maior esse debet quàm distantia *centrorum* plani K O. vt ex ipsa constructione liquet.

PROPOSITIO XCVIII.
Problema 34.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque, planũ inuenire, & in eo circulum describere vt ex quouis circumferentiæ puncto summa ff dd datis similium, datam habeat rationem cuilibet spatio dato: & iterum alia summa ff. dd ex eisdem rectis similium etiam alijs datis aliam habeat rationem, eidem, vel cuilibet alteri spatio dato; vel priori summæ.

EXPOSITIO. Fig. 39.

SInt data puncta A. B C. D. in plano, vel in solido Inueniendum est planum I K. in quo possit describi, & describatur circulus L N M O. vt ex quolibet circumferentiæ puncto summa *ff dd.* ex rectis ad A. B. C. D. similium datis △. □ □ ⬠ sit ad □ T in ratione data R ad S. & iterum summa *ff. dd.* ex eisdem rectis ad A B C D similium datis ▭ ▱ ⬡ △ sit ad idẽ □ T vel ad aliud ⊡ Y. vel ad priorem summam in data ratione X. ad Z.

Construct. Primo inueniatur *centrum ff.dd.* ad puncta A. B C.D. quæ datis △. □. □. ⬠. similes sint (87 *p*) & sit E. Deinde inueniatur etiam *cẽtrum ff.dd.* ad eadem puncta A.B.C D. quæ datis ▭. ▱. ⬡. ▷. similes sint (87 *p.*) & sit F.

Secundo ducatur EF vtrinque infinita, & transeat per ipsam quodcumque planum GH.

Tertio in plano GH. ex *centro* E. describatur circulus LPM. vt summa *ff.dd* datis △. □. □. ⬠ similium ad □ T. sit vt R. ad S (94 *p*) Et similiter ex *centro* F in eodem plano GH describatur circulus LQM. vt summa *ff dd.* datis ▭. ▱. ⬡. ▷ similium sit ad idem □ T. vel ad □ Y. vt X. ad Z (94 *p.*) vel ad priorem summam (97 *p*)

Quarto per circulorũ intersectiones L. M. ducatur in plano GH. infinita LM. & per rectam LM. ducatur planum I K rectæ EF. vel priori plano GH perpendiculare. & radio LV. describatur in eo circulus LNMO. Dico planum IK. esse quæsitum, & circulum LNMO. satisfacere quæstioni propositæ.

DEMONSTRATIO.

CVm recta EF. coniungat *centra* circulorũ LPM. LQM. secat bifariam, communem chordam LM (5. *l.* 3.) Ergo circulus LNMO. ra-

radio VL. deſcriptus tranſit per M. cũ VL, VM ſint æquales, ſed ex conſtructione EV. & FV. ſunt plano IK. perpendiculares ad idem punctum V. quia ſunt eadem recta EF. Ergo erit V. *centrum* plani IK (56. *p.*) Ergo ex quolibet puncto circunferentiæ ſumma ſemper erit eadem (60 *p.*) ſed ex puncto L quod eſt in circulo LPM. ſumma *aff. dd.* datis △. □ □. ○. ſimiliũ eſt ad □ T vt R ad S ex conſtructione: & ex eodem pũcto L quod eſt in circulo LQM. ſumma *aff. dd.* datis ▭. □ ○. △. ſimilium ad □ T. vel ad □ Y. vel ad priorem ſummam eſt vt X. ad Z. ex conſtructione: Ergo cum etiam punctum L ſit in circulo LNMO plani IK ex quolibet circunferentiæ puncto erit ſumma *aff. dd.* datis △ □. □ ○. ſimiliũ ad □ T. in ratione data R ad S. & ſumma *aff. dd.* datis ▭ □. ○ △. ſimilium ad □ T. vel ad □ Y. vel ad priorem ſummam, iuxta conſtructionem, in alia ratione data X. ad Z. Quod erat, &c.

ALIA CONSTRVCT. ET DEMONST.

EX primo inuentis *centris* E & F. deſcribantur duæ ſphæræ iuxta quæſtionis tenorem (94 *p.*) ſint ſphæræ LPM. LQM earum communis ſectio erit planum circuli LNMO cuius diameter LM & cum tota peripheria LNMO. ſit in ſuperficie vtriuſque ſphæræ LPM.

LQ

LQM. ſumma ex quolibet circunferẽtiæ puncto eadẽ erit quæ ex quouis ſuperficiei ſphæricæ puncto: Ergo cùm ſphæræ ſupponantur deſcriptæ iuxta quæſtionis tenorẽ, quodlibet punctu circunferẽtiæ LNMO. quæſtioni propoſitæ ſatisfaciet. Quod erat demonſtrandũ.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

SI ſumma radiorum, tam ſphærarum, quàm circulorum plani GH. non ſit maior diſtantia *centrorum* E F vel vnus radius ſit maior quã ſumma alterius, & diſtantiæ *centrorum*, erit quæſtio impoſsibilis, quia in neutro caſu dabitur circulorum, vel ſphærarum interſectio, vt ex ipſa conſtructione clariſsime liquet.

PROPOSITIO XCIX.

Problema 35.

DAtis quibuslibet punctis vtcumque, ſphæram deſcribere, vel circulum in dato plano, vt ſumma ff. datis ſimilium ex quolibet ſuperficiei, vel circunferentiæ puncto + vel − quotcumque figuris ex radio datis ſimilibus, datam habeat rationem cuilibet ſpatio dato: vel ex datis punctis ad datam rectam, vel curvam totidẽ rectas inflectere ſub eadem conditione.

EXPOSITIO. Fig. 40.

DAta puncta in plano, vel in ſolido vtcũque

ſint

ſint A. B C. D. E. F. G. ſpecies figurarum datæ ad illa terminādæ △*a* △*b* ▭*c* ▯*d*. □*e* ▢*f* ○*g*. Quæritur ſphæra H. vel in plano dato M N. quæritur circulus O. vt ex quolibet ſuperficiei ſphæricæ H. puncto, vel circunferentiæ circularis O. ſumma *ff.* datis *a b*. &c. ſimilium ſi ab illa prius auferantur quotcumque figuræ ex radio Z. datis alijs ſimiles; vél addantur illi ſcilicet in noſtro exemplo. ſi addantur, vel auferantur tres figuræ ex radio ſimiles ▭ K ○ *m*. ○ *n* ſumma, vel reſiduum ad ſpatium datum □ Y. ſit in data ratione R. ad S.

Conſtructio Primo inueniatur *centrum* abſolute minimum H. vel *centrum* O. in plano MN(87 *p*.) Deinde inueniatur minima ſumma ex H. vel O. & reducatur ad Quadratum LK(88 *p*.) Inſuper inueniatur T. media inter R & S(2 *p*. 5.) & fiat vt T. ad R ita Y ad IK(2 *p*. 7.) & ſupra illam fiat ſemicirculus, cui accomodetur minima ſumma KL. & iungatur I L. Præterea inueniatur Z. vt ſumma *ff.* ſimilium datis *a b c d e f g* + K *m n*. ſit æqualis □ IL(ex 89 *p*.) ſi figuræ ſimiles K *m n* addendæ ſunt. vel ſi fierint auferēdæ inueniatur Z. vt ſumma *ff.* ſimilium *a b c d e f g* — ſumma *ff.* ſimilium K *m n*. æqualis ſit □ IL(ex 90. *p*.) Dico rectā Z. eſſe radium ſphæræ ex *cētro* minimo H deſcri-

ben-

bendæ, vel circuli ex *centro* O. & satisfacere quæstioni.

Hæc constructio quatuor etiam casus admittit prout in figuris similibus obseruatũ est (86 *p.*) Quod præmonuisse sufficiat, ne singulos cõstructionis casus cogamur repetere: hic tamen non attendendum est ad numerum figurarum subtrahendum, sed ad illarum summã, an scilicet maior, æqualis, vel minor sit sũma figurarum ex radio iuxta punctorum numerum, & qualitatem: cùm enim figuræ dissimiles sint, potest vna figura maior esse pluribus alijs dissimilibus ex eadẽ recta descriptis.

DEMONSTRATIO.

CVm H. sit *centrum* minimum, & sphæra sit radio Z ex H. descripta, vel circulus ex O. summa ex quolibet circunferentiæ puncto ad A.B C.D &c æquatur minimæ summiæ ex H. vel O + totidem *ff* similibus radij Z (60. *p.*) Ergo si addantur tres *ff* □Z + ○Z + ○Z datis K.*m n.* similes, erit summa æqualis minimæ + totidẽ *ff* radij + □Z + ○Z + ○Z. vel *econtr.*

Si auferantur tres *ff* □Z. ○Z ○Z. erit summa æqualis minimæ sũmæ — □Z — ○Z — ○. sed minima summa æquatur □ K L ex constructione: & 7 *ff* ex Z. similibus *a b. c d. e f g.* + vel — 3 *ff* Z. similibus K.*m n.* ex cõstructione

iux-

iuxta quæstionis tenorem, æquantur □ IL. Ergo summa ex quolibet superficiei sphæricæ vel circumferentiæ circularis puncto æquatur □ LK + □ LI hoc est □ IK. (4.*l.*6) sed □ IK ad □ Y. est in duplicata ratione IK ad Y. (4.*l.*6) vel in duplicata ratione R ad T (1.*l.*5.) hoc est vt R. ad S. quæ est ratio duplicata R ad T cùm sint continuæ R T S ex constructione: Ergo summa ex quolibet puncto superficiei sphæricæ, vel circumferentiæ circularis + vel — 3 *ff* radij Z. similibus K *m.n* est ad spatium datum □ Y. in ratione data R ad S. Quod efficiendum, & demonstrandum erat.

Si quæratur punctum in recta, vel curva data, ad quod inflectendæ sunt rectæ. Dico esse punctum in quo sphæra tangit, vel secat rectam, vel curvã: aliter impossibilis erit quæstio prout in 95 *p.*

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

EAdem est quæ in 86. *p* Si enim figuræ ex radio addendæ sint, vel subtrahendæ, & earũ summa minor quam summa figurarum ex radio punctorum numero correspondentium, ratio data maior esse debet, quàm ratio minimæ summæ ad spatium datum: Si summa auferenda æqualis sit alteri summæ ex radio erit ratio data ipsa ratio minimæ summæ ad spa-

 tium.

tium datum, & quælibet ſphæra ſatisfacit. Tandem ſi ſumma auferenda maior fuerit, ratio data minor eſſe debet quàm ratio minimæ ſummæ ad ſpatium datum: quæ omnia ex conſtructione, & ex 86. *p.* clariſſimè inferuntur.

PROPOSITIO C.

PROBLEMA CATHOLICVM XXXVI.

DAtis quibuslibet punctis in plano, vel in ſolido vtcumque diſpoſitis, circulũ deſcribere, vt ſi ex quouis circunferentia puncto ſumma figurarum datis ſimilium ad omnia puncta, vel ad aliqua eorum determinata addantur, vel ſubſtrahantur quotcumque figuræ ex recta à circunferentia in centrum minimum, quæ datis aliis ſimiles ſint: ſummarum ſumma, vel differentia datam quamlibet rationem habeat cuilibet ſpatio dato.

Et iterum ſi ſumma figurarum aliis etiam datis ſimilium ad eadem omnia puncta, vel ad eorum aliqua, vel ad qualibet alia addantur, vel ſubſtrahantur quotcumque figuræ ex recta à circunferentia in ſecundum centrum minimum, quæ aliis etiam datis ſimiles ſint, ſummarum ſumma, vel differentia quamlibet aliam datam rationem habeat, eidem ſpatio, vel cuilibet alteri dato; vel priori ſummarum ſumma, vel differentia.

EXPOSITIO. Fig. 41.

SInt data puncta A. B. C. D. E. F. G. H. I. K in plano, vel in ſolido vtcũque diſpoſita: Quæ-

ritur circulus radio LP deſcriptus, vt ex quolibet circunferentiæ puncto ſi primo ducatur rectæ ad A B C D. quorum *centrum* O. ſumma figurarum ſimilium △ *a* □ *b* ▱ *c*. ◇ *d* cum 2*ff*. ex recta OP quæ ſimiles ſint datis ▱ *e*. ◇ *f* ſumarum ſumma, vel omnium ſumma. ſit ad □ X. in data ratione R ad S. hoc eſt ſi punctum aſſumptum ſit P ſumma *ff*. △ PA + □ PB + ▱ PC + ◇ PD addita ſũma ▱ OP + ◇ OP. vtraque ſimul ſit ad □ X. vt R. ad S.

Iterum ex quolibet eiuſdem circunferẽtiæ puncto ſi ducantur rectæ ad puncta B C G. H. I K quorum *centrum* M ſumma *ff* ſimiliũ datis ▱ *e*. △ *a* △ *g*. ◇ *h* ▱ *r* ◇ K ablatis prius 3 *ff*. ex recta MP. quæ ſimiles ſint datis △ *l*. □ *m*. ◁ *n* ſcilicet vtriuſque ſummæ differentia ſit: ad idem ſpatium □ X. vel ad aliud ſpatium datũ □ Z. vel ſi lubet ad priorem ſummam △ P A + □ PB + ▱ PC + ◇ PD + ▱ PO + ◇ PO in qualibet alia ratione data T. ad V.

Eadem ratione in prima quæſtionis parte potuerunt aſſumi plura puncta, vel omnia ſimul; & figuræ omnes inter ſe ſimiles, vel aliquæ ſimiles, & aliæ diſſimiles, vel omnes diſſimiles & ſicut iubetur addi 2*ff* rectæ OP. potuerunt addi, vel ſubſtrahi quotcunque aliæ, quibuslibet ſimiles, &c.

Et

Et in ſecunda quæſtionis parte ſicut ex prima fuere aſſumpta puncta B. & C. variatis figuris, potuere etiam omnia ſimul aſſumi: & figuræ pertinentes ad ſecundam partem etiã omnes ſimiles inter ſe, vel aliquæ ſimiles, & aliæ diſſimiles; vel omnes diſſimiles. & vt præcipitur ſubſtrahi 3*ff.* rectæ MP. ſimiles *l.m n.* plures aliæ ſimiles, vel diſſimiles ſubſtrahi, vel addi potuere. Idem de ſpatijs X. & Z. & rationibus datis intelligendum eſt. Quibus ritè intellectis accedamus ad conſtructionem.

CONSTRVCTIO.

PRimo claritati, & facilitati conſulendum eſt interclusa æquiuocationi aditu, quæ facile in tanta punctorum, & figurarum diuerſitate ſubrepere poſſet. Ponãtur ergo ſeorſum in compendium redacta, quæ vtraque pars quæſtionis præſcribit, hoc ordine.

Prima pars. △A. □B ▭C ◇D. + 2*ff.* OP. ſimiles ▱ *e* ◇*f* ad □X vt R. ad S.

Secunda pars ▱B. △C ◺G. ⬠H ▭I. ⬡K. + 3*ff* MP ſimiles △*l.* □*m* ◿ *n* ad X vel Z. vel ad priorem ſummam vt T. ad V.

Secundo inueniatur *centrũ ff.* ad A B C D. (87 *p*) & ſit O & ſimiliter *centrum ff.* ad B. C. G. H. I K & ſit M. & iungatur MO

Tertio ducatur per rectam MO quodlibet

bet planũ in quo deſcribatur circulus QNP, primæ quæſtionis parti ſatisfaciens (99 *p*.)

Quarto ſi in ſecunda quæſtionis parte datum ſit ſpatium □ Z, deſcribatur in eodẽ plano ex *centro* M circulus QYP, ſatisfaciens ſecundæ quæſtionis parti (99. *p*.) & interſecans primum circulum in P & Q.

Quinto ducta recta PQ per ipſam tranſeat planum perpendiculare rectæ YM, & in illo cũ radio LP deſcribatur circulus P*p*Q*q*. Dico circulum iſtum eſſe quæſitum, & ſatisfacere quæſtioni omninò.

Sexto ſi ratio data T. ad V. debeat eſſe ad priorem ſummam: fiat prius vt S. ad R, ita □ X. ad □ Z. & erit □ Z. inuentum æquale priori ſummæ Cognito iam □ Z inueniatur circulus PYQ & reliqua omnia omninò vt antea. Dico ex quolibet puncto Q circumferentiæ P*p*Q*q* ſummam △QA. □QB ▭QC. ◇QD. +▱OP ◇OP eſſe ad □ X vt R ad S & iterum differẽtiam ſummarum, nempe ▱QB. △QC △QG. ⬠QH. ▻QI. ⬡QK — △MP. ▯MP. ⊿MP. eſſe ad □ Z vel ad priorem ſummã quod idem eſt, in data ratione T. ad V.

DEMONSTRATIO.

SVmma *ff*. ex quolibet puncto circumferentiæ PNQ + ▱OP ◇OP, eſt ad □ X. in data ra-

ratione R. ad S. & iterum ex quolibet puncto circunferentiæ PYQ ſumma —△MP.□MP.◿MP. eſt ad □Z in alia data ratione T. ad V. omnia ex conſtructione. Sed punctum P eſt commune vtrique circunferentiæ, vbi illæ ſe interſecant. Ergo ex communi pũcto P ſumma *ff* ad A. B C D. +▱OP.◇OP. eſt ad □X. vt R. ad S. & ſumma ad B. C G H. I K —△MP.□MP.◿MP ad □Z. eſt etiam in ratione T. ad V. ſed punctum P eſt in circunferentia circuli P*p*Q*q* ex L *centro* plani perpendicularis rectæ OM. ex conſtructione. Ergo ex quolibet puncto circunferentiæ P*p*Q*q*. ſunt ſummiæ ſemper eædem (57.*p*.) Ergo ſumma ex quolibet puncto Q. circunferentiæ P*p*Q*q* in puncta A. B. C D+▱OP.◇OP. eſt ad □X vt R. ad S & ex eodem puncto Q ſumma in B. C. G. H. I. K+△MP.□MP.◿MP eſt ad □Z in ratione data T. ad V. Quod erat demonſtrandum.

Similiter ſi ſecunda ſumma ad priorem debuerit eſſe vt T. ad V. cum factum ſit □X ad □Z. vt R. ad S & prior ſumma ad □X. etiam vt R. ad S. eſt □X æquale priori ſũmæ (2.*l*.5.) Ergo cum demonſtratum ſit ſecundam ſummam ad □X eſſe in data ratione T. ad V. etiã ſecunda ſumma ad priorem erit in eadem ratione T. ad V. prout cõſtructio iuxta quæſtionem

nem facta fuerit. Quod erat demonſtrandũ.

CONSTRVCTIO II.

EX inuento *centro ff.* O. in punctа A. B. C D deſcribatur ſphæra PNQ ſatisfaciens priori quæſtionis parti (99. *p*) & iterum ex inuento *centro* M. punctorum B. C. G. H. I K deſcribatur ſphæra PYQ ſatisfaciens ſecundæ parti quæſtionis: communis ſphærarum ſectio erit circulus P*p*Q*q* & eius diameter PLQ Dico circulum hunc eſſe quæſitum.

Demonſtratio perſpicua eſt. Quoniam circulus P*p*Q*q* eſt communis ſectio ſphærarũ eſt in ſuperficie vtriuſque ſphæræ. Ergo cum quodlibet punctum primæ ſphæræ ſatisfaciat primæ quæſtionis parti, & quodlibet punctũ ſecundæ ſphæræ ſatisfaciat ſecundæ parti, tota circuli circunferentia, quæ eſt in vtraque ſuperficie ſphærica vtrique parti quæſtionis ſatisfaciet. Quod erat, &c.

Si comparatio ſummæ ad ſummam faciẽda ſit. debet prius inueniri □Z æquale priori ſummæ, vt antea efficiendo □X ad □Z vt R. ad S. Hæc demonſtratio clarior, & facilior eſt. conſtructio tamen praxi minus eſt cõmoda.

DETERMINATIO PROBLEMATIS.

PRoblema triplicem determinationem requirit, ſcilicet pro prima, & ſecunda quæſtio-

ſtionis parte,& pro vtraque ſimul Determinatio pro qualibet parte, eſt eadem problematis præcedentis 99 *p.* Determinatio pro vtraque parte ſimul,eſt circulum QNP PYQ interſectio. Si enim circuli ſe nõ interſecent, erit quæſtio omninò impoſsibilis, vt ex iſta conſtructionis demonſtratione liquet Idemque dicendum de ſphærarum interſectione in ſecunda praxi. vt perſpicuum eſt.

OPERIS CONCLVSIO.

PRoblema Catholicum clara, ac facili methodo ſolutum dedimus, quod forte nimis arduum, nedum impoſsibile cui videri poterat. Magna ſane moles minimo cẽtro innixa Geometria magnitudinem ſatis indigitat, & non immerito Geometria magna in minimis dicatur in ha parte prima. Magnam eſſe in minimis ſecunda, & tertia oſtendent, quæ proxime ſequuntur priori ſaltem eo nomine maiores, quod in determinatis planis, ac ſolidis perſpicua breuitate nobiliora concludant.

FINIS.

APPENDIX
PRO CIRCVLI, ET ELLIPSIS QVADRATVRA.

EX demonſtratis *prop.* 8. ſequitur datam eſſe Quadraturam circuli, vel Ellipſis ſi inueniatur triangulum, vel polygonũ quodlibet circulo, aut ellipſi minimum. Sit enim in *fig.* 3 ſemicirculus M ſupra diametrum AB & Triangulum rectangulum H. ſupra baſim BC detur eſſe minimum ſemicirculo M. Dico datam eſſe quadraturam totius circuli M. Si enim ſumatur BD æqualis diametro BA & ducatur DI. perpendicularis diametro, erit rectangulum F. æquale circulo M.

DEMONSTRATIO.

SI BE ſumatur æqualis BA. erit ſemicirculus BNE quadruplus ſemicirculi M (ſcilicet vt quadratum AE ad quadratum AB (5 *l.* 6.) Ergo cum ſemicirculi M. & Y. ſint æquales, complementum N erit æquale duobus ſemicirculis M. & Y. hoc eſt toti circulo M. ſed cõplementum F eſt æquale etiam complemento N quia figuræ minimæ habent æqualia cõplementa (8 *p*) Ergo rectangulum, vel complementum F æquale erit circulo M. Vnde

ſi

fidetur triangulum rectangulum semicirculo minimum datum erit parallelogrammum rectangulum circulo æquale. Si vero triangulum non fit rectangulum, erit parallelogrammum F circulo æquale & vtrumque facile ad quadratum reduci poterit, &c.

Tandem si rectilineum datum circulo minimum sit polygonum quodlibet irregulare, habebitur complementum rectilineo circulo æquale in quadratum facile reducendum. Qui ergo rectilineum circulo minimum demonstrauerit, circuli Quadraturam perficiat.

SCHOLIVM.

HInc patet mirabilis connexio Minimorum cum grauitatis *centro*. Si enim rectilineum inueniatur circulo, ellipsi, vel sectori minimum data erit circuli, & ellipsis quadratura, vnde etiam, & grauitatis *centrum* partium ipsius circuli, prout exposuit P. IOANNES DE LA FAILLE, Regius Professor in hac Matritensi Academia Antecessor noster & *è conuerso* dato *centro* grauitatis dabitur etiam circuli Quadratura, vnde & polygonum cuilibet simile circulo minimum. Data etiam Quadratura vtrumque *centrum*, minimum scilicet, & grauitatis vice versa innotescet. Tres isti Gordij nodi adeò inter se connexi vt

quo-

quouis soluto, soluti etiam reliqui sint, hanc habent inconnexionem, vt quiuis seorsim ab alijs inuestigari queat. Nouam igitur aperuimus viam ad circuli, vel ellipsis Quadraturam inuestigandam Geometriæ studiosis fortè non iniucundam.

FINIS.

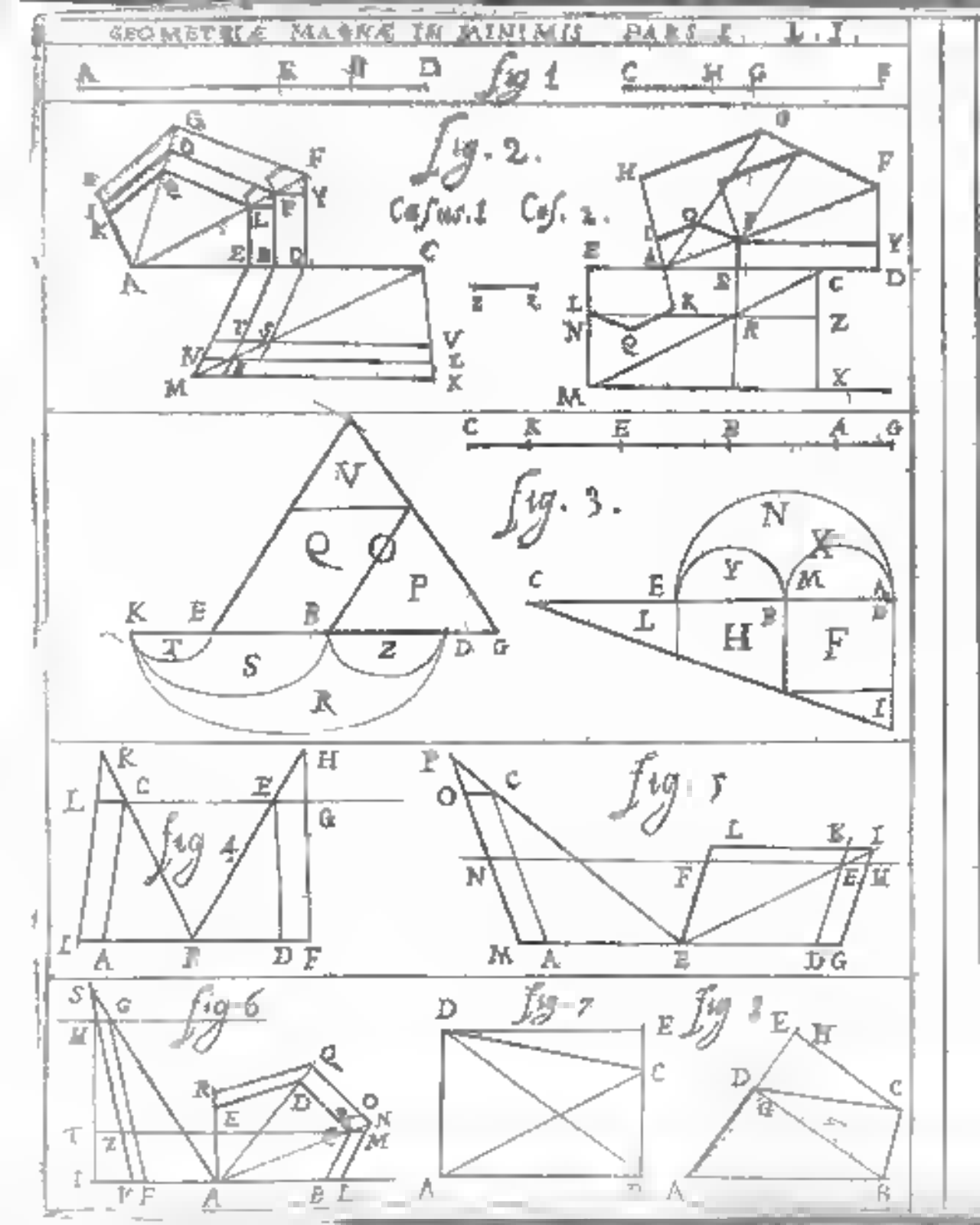

A E B D
fig 1
C H G F
fig. 2.
Casus 1
Cas. 2.
fig. 3.
fig 4.
fig 5
fig 6
fig 7
fig 8

fig 9. LII PI

fig 10

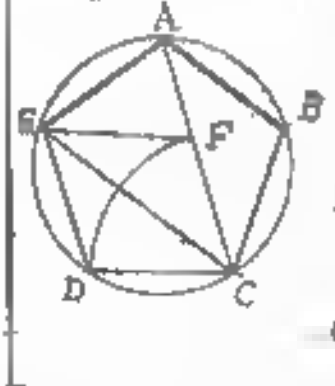


fig. 11

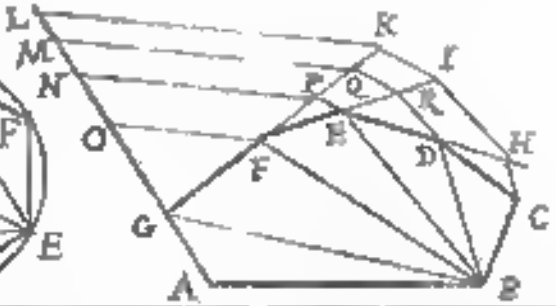


fig. 12

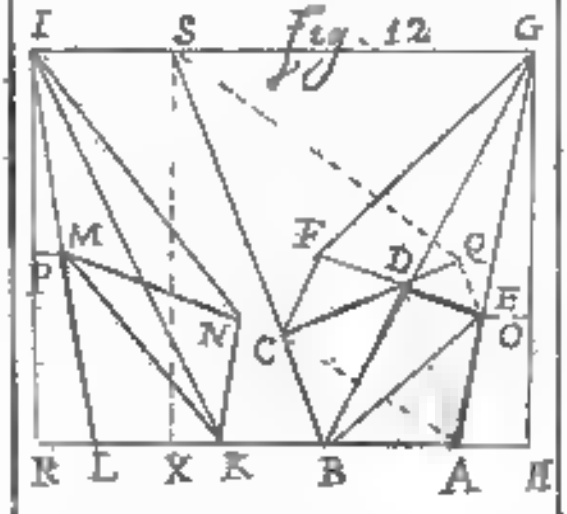
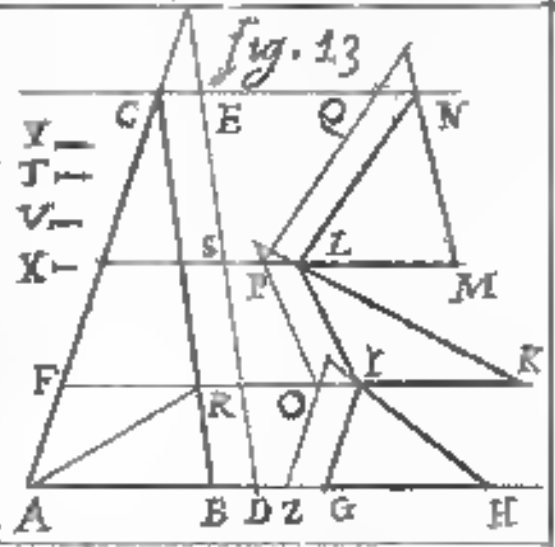


fig. 13



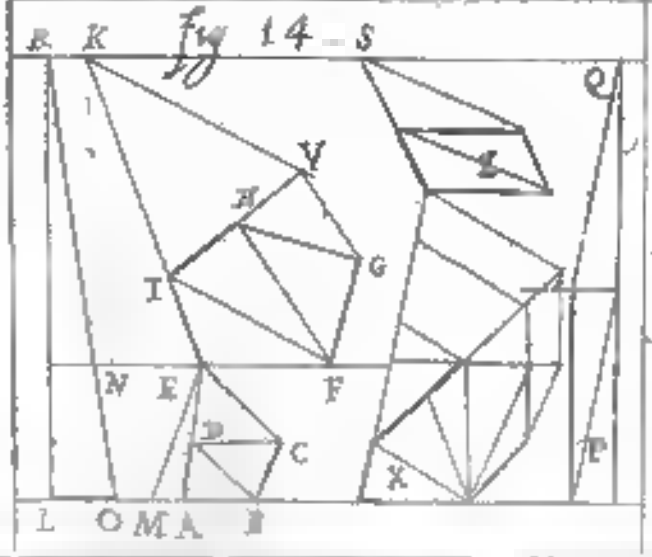


fig 15

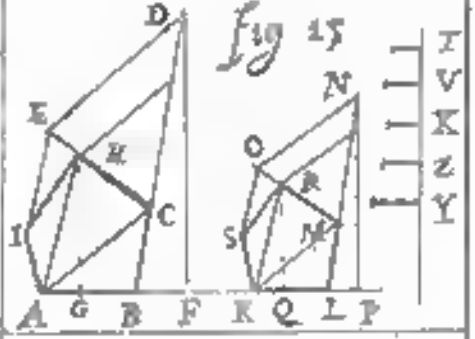


fig. 16

Fig 17 L III P.I.

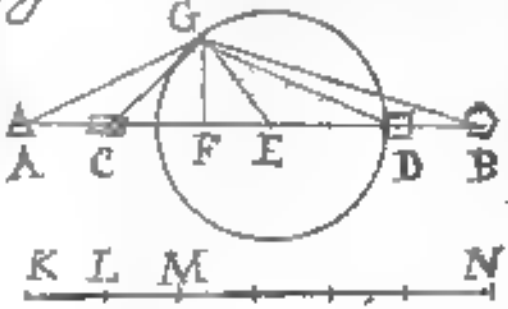


Fig. 18.

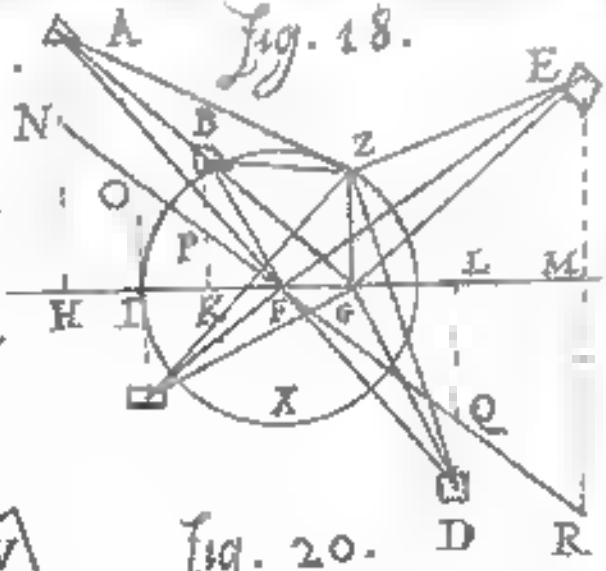


Fig. 19.

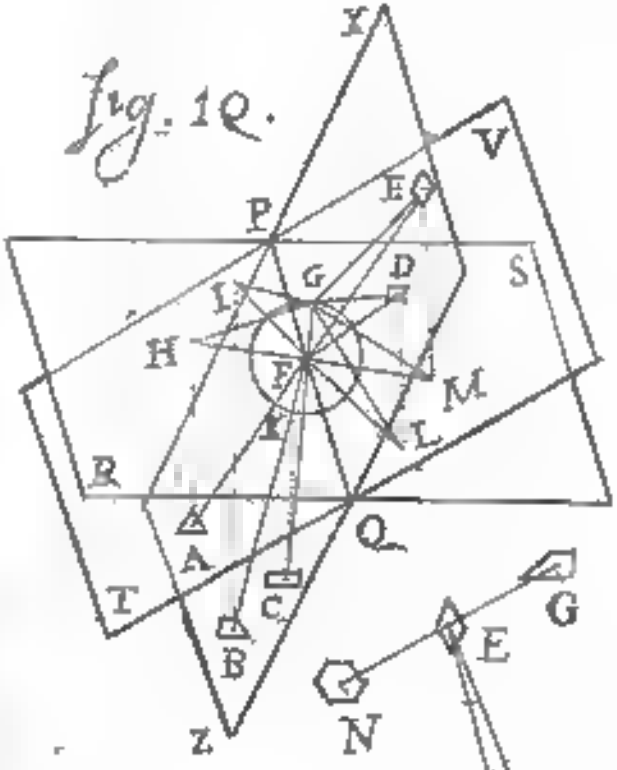


Fig. 20.

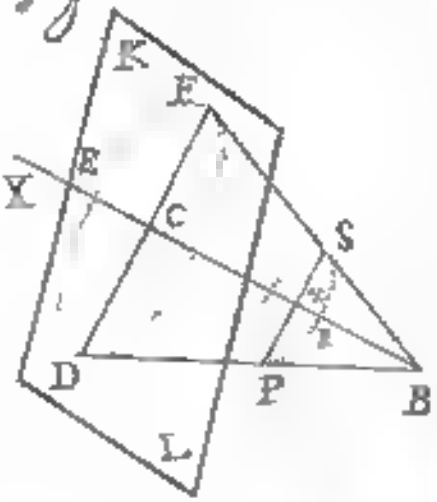


Fig. 21.

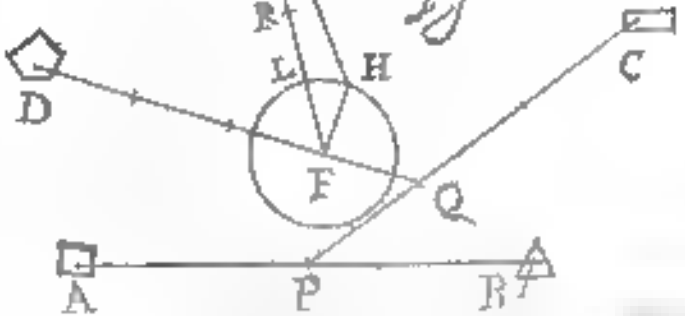
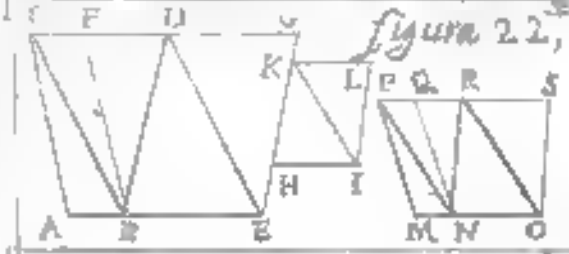
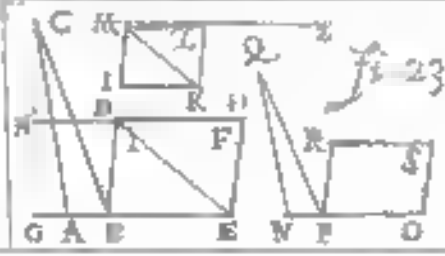


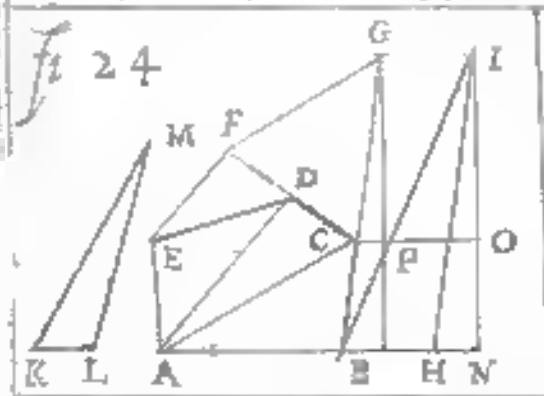
figura 22.



fi 23.



fi 24



f 25.

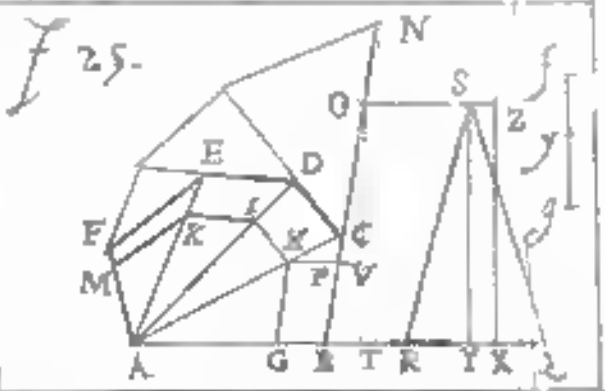
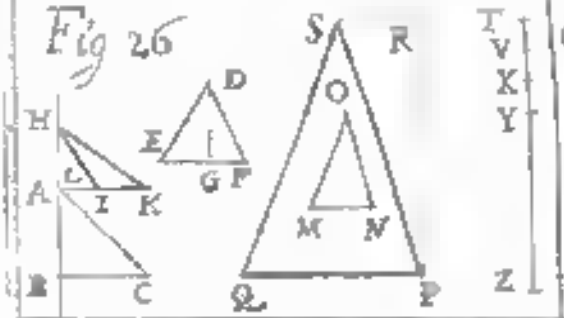


Fig 26



fi 27.

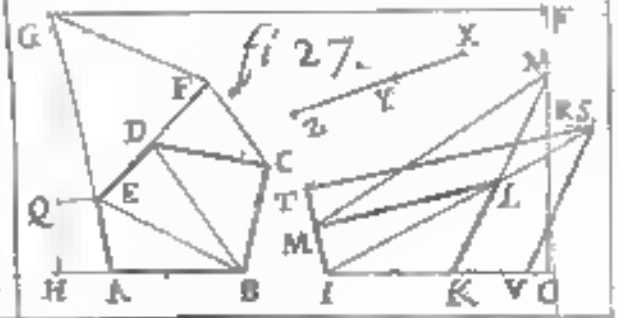


Fig 28

Fig 29

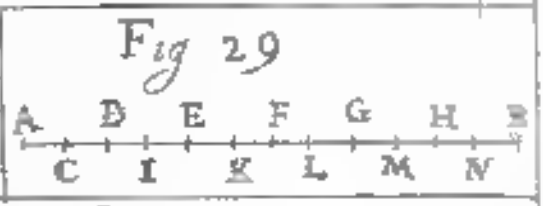


fig 30

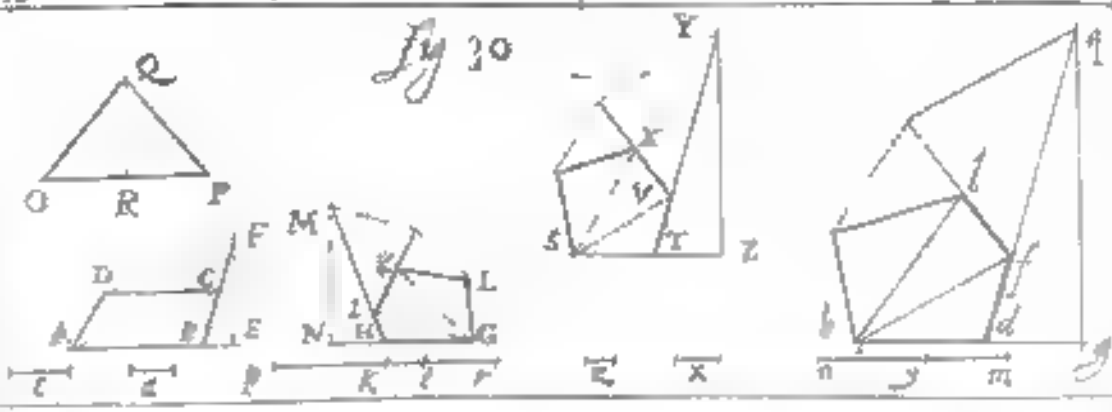


fig 31

fig 32

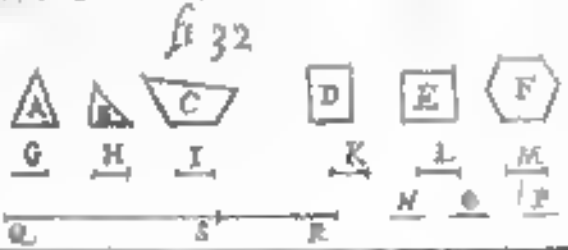


fig 33

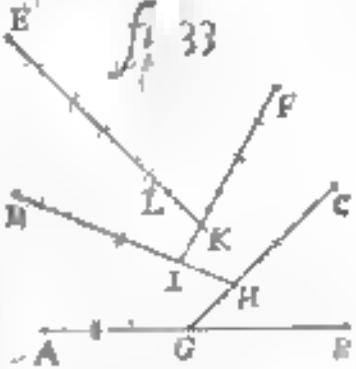
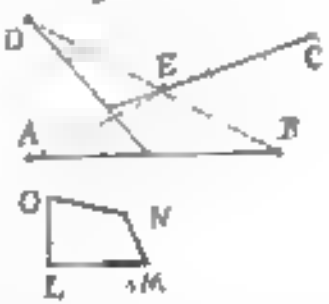


fig 34.



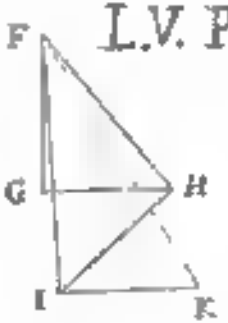
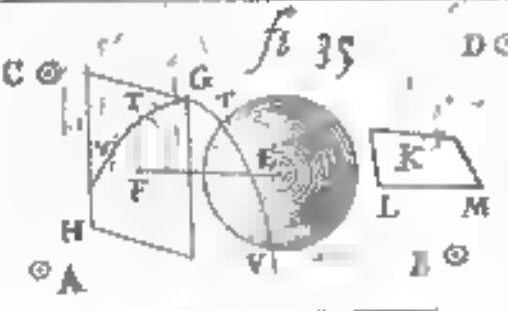


fig 35



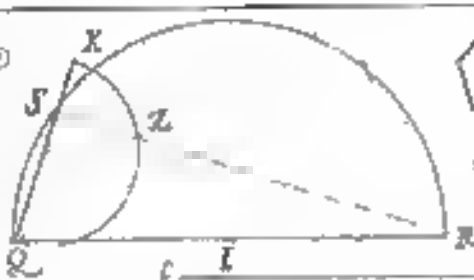
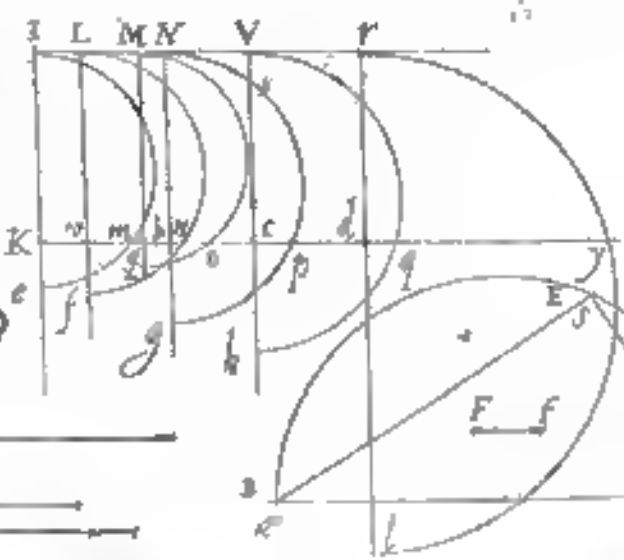


fig 36.



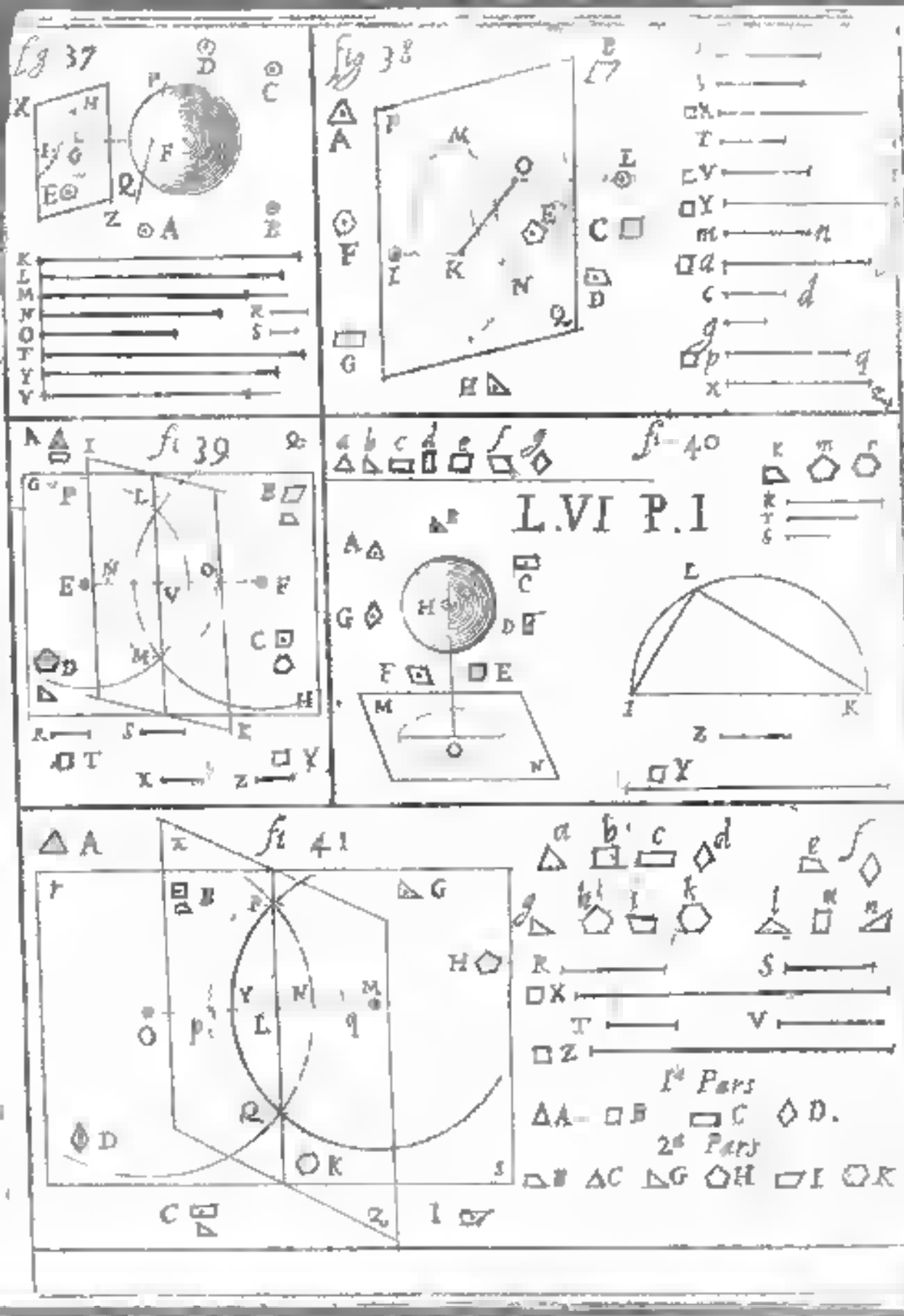


fig 37
fig 38
fig 39
fig 40
fig 41
L.VI P.I
I^a Pars
ΔA — □B ▭C ◇D.
2^a Pars

Mbr 1281037